

R T U

Būvniecības fakultāte

Būvniecības un rekonstrukcijas institūts
Būvkonstrukciju katedra

G.TETERS

BŪVKONSTRUKCIJU APRĒĶINU

SKAITLISKĀS METODES

(lekciju konspekts)

Rīgā, 2008

Metodisko materiālu izstrādāja:
Profesors, Dr.habil.sc.ing. Gundaris Teters
RTU Būvkonstrukciju katedra

Recenzenti:
Profesors, Dr.sc.ing. Andris Čate
Asoc. Profesors, Dr.sc.ing. Raimonds Ozoliņš

© Rīgas Tehniskā universitāte, Būvkonstrukciju katedra, 2008

Satura radītājs

Priekšvārds	4
1.nodaļa. TĪKLA METODES BŪVKONSTRUKCIJU APRĒĶINOS	
§1.1 Galīgo diferenču operatori	5
§1.2 Locīklās balstītas sijas analīze	5
§1.3 Statiski nenoteicamas sijas	9
§1.4 GDM operatori augstāko kārtu atvasinājumiem	11
§1.5 Plātnes izlieces	13
§1.6 Kollokāciju metode	18
§1.7 Sijas sieniņas aprēķins	20
§1.8 Dinamikas uzdevumi	30
2.nodaļa. BŪVKONSTRUKCIJU APRĒĶINU ENERĢĒTISKĀS METODES	
§2.1 Pamatjēdzieni un principi	34
§2.2 Deformējama ķermeņa enerģijas funkcionāls	34
§2.3 Lagranža pilnās potenciālās enerģijas stacionaritātes princips	38
§2.4 Kastiljano papildus enerģijas stacionaritātes princips	39
§2.5 Ritca metode	48
§2.6 Plātnes izlieces aprēķins ar Ritca metodi	49
§2.7 Kastiljano principa pielietošana skaitliskos aprēķinos	51
§2.8 Kastiljano principa izmantošana taisnstūra plātnes spriegumu aprēķinā	52
§2.9 Bubnova-Galorkina metode	54
3.nodaļa. GALĪGO ELEMENTU METODE (GEM)	
§3.1 GEM galvenās operācijas	58
§3.2 GEM pārvietojumu metodes formā	58
§3.3 Taisnstūra trijstūra stinguma matrica	63
§3.4 Atbalsta sieniņas aprēķins	65
§3.5 Plātnu liece	67
§3.6 Noturības aprēķins ar GEM	70
§3.7 Dinamisko uzdevumu risināšana ar GEM	76
§3.8 Rāmju noturības aprēķins	81
4.nodaļa. ROBEŽELEMENTU METODE	
§4.1 Metodes būtība un galvenie jēdzieni	87
§4.2 Sijas uz elastīga pamatojuma aprēķins	87
§4.3 Sijas balstītas uz elastīga pamatojuma, lieces aprēķins	90

5. nodaļa KONSTRUKCIJU NELINEĀRO UZDEVUMU APRĒĶINU METODES	
§5.1 Problēmas nostādne un risināšanas metodes	94
§5.2 Statiskās teorēmas pielietojums robežslodzes noteikšanai	95
§5.3 Kinemātiskās teorēmas pielietojums robežslodzes noteikšanai; Lagranža virtuālo pārvietojumu princips	95
§5.4 Ģeometriski nelineārā plātņu teorija un tās lielo izlieču aprēķins (Bubnova – Gałorkina metode)	98
§5.5 Lēzeno čaulu izlieces ģeometriski nelineārā nostādnē (Bubnova-Gałorkina vienādojumu sistēmai	104
Literatūra	108

PRIEKŠVĀRDS

Precīzi būvmehānikas un elastības teorijas uzdevumu risinājumi, aprēķinot būvkonstrukciju stipribu, izlieces, noturību un dinamiku, un ievērojot robežnosacījumus, iespējami tikai vienkāršas formas konstrukcijām atsevišķos to slogošanas gadījumos un balstu nostiprinājumos. Tāpēc inženierpraksē liela nozīme ir aptuvenām skaitliskām būvkonstrukciju aprēķinu metodēm.

Skaitliskās metodes atrod uzdevuma risinājumu nevis ar vienas vai vairāku funkciju palīdzību, t.i. analītiski, bet atrod atbilstošo skaitļu kopu. Šī informācija par sistēmas izliecēm, spriegumiem un piepūlēm atsevišķos izvēlētos sistēmas punktos bieži ir pietiekoša konstrukciju projektēšanai; ja nepieciešams atrasto skaitļu kopu var aproksimēt ar kādu adekvātu funkciju.

Risinājumus, kas novēd pie skaitļu kopas sauc par "diskretizācijas metodēm", bet pēc būtības tās var saukt arī par "skaitliskām metodēm".

Skaitliskās metodes var iedalīt divās galvenās grupās:

1) Matemātiskās diskretizācijas metodēs, kas diskretizē problēmas diferenciālvienādojumus iegūstot aptuvenus risinājumus skaitļu veidā atsevišķos mezglu punktos. Šīs metodes uz konstrukcijas konstruē "tīklu" ar mezglu punktiem, kuros atrod risinājumu. Šīs metodes sauksim par tīkla metodēm.

2) Fizikālās diskretizācijas metodes patieso konstrukcijas modeli ar bezgalīgi daudzām kustības brīvībām atvieto ar aptuvenu, kuram ir galīgs kustības brīvību skaits. Šīs metodes parasti balstās uz enerģētiskiem variāciju principiem, tās konstruē procedūras pārejai uz sistēmu ar galīgu kustības brīvību skaitu un atrisinājumu dod skaitļu kopas veidā, kas raksturo sistēmas parametrus (izlieces, piepūles u.c.).

Konspektā iztirzātas abas metožu grupas.

Kopīgs visām skaitliskām metodēm tas, ka uzdevums tiek reducēts uz algebrisku vienādojumu sistēmu, bieži ar lielu nezināmo skaitu, ko sekmīgi risina izmantojot datorus, datorprogrammas. Kompakts algebrisku vienādojumu pieraksts un risinājumi iespējami pielietojot matricu algebru [2,3,14].

Lekciju konspekteks sastādīts izmantojot beigās norādīto literatūru, no kurienes arī patapināti lielākā daļa piemēru.

Atzīmēsim, ka visas konspektā aplūkotās aptuvenās skaitliskās metodes reālās sistēmas modelē ar sistēmām ar galīgu kustības brīvību skaitu, līdz ar to palielinot to stingumu. Tāpēc skaitlisko aprēķinu deformācijas un pārvietojumi vienmēr mazāki par patiesām deformācijām.

1.nodaļa. TĪKLA METODES BŪVKONSTRUKCIJU APRĒĶINOS

§1.1. Galīgo diferenču operatori

Visu konstrukcijas apgabalu (robežproblēmas risināšanas apgabals) - sijas ass, plātnes laukums, čaulas virsma u.t.t. - pārklāj ar tīkla līnijām, kuru krustpunkti ir mezgli. Nezināmie ir meklējamās funkcijas vērtības mezglos. To atrašanai konstruē aptuvenas izteiksmes funkciju atvasinājumiem, kas izteiktas ar šo funkciju ordinātēm mezglos t.s. atvasinājumu galīgo diferenču operatori. Atrastos operatorus ievieto diferenciālvienādojumos un pieprasa, lai diferenciālvienādojumi tiktu apmierināti katrā tīkla mezglā. Arī robežnosacījumus formulē galīgo diferenču operatoru izteiksmē. Kopumā uzdevums noved pie algebraisku vienādojumu sistēmas ar nezināmām meklējamo funkciju vērtībām mezglos. Risinājums dod meklējamo lielumu kopu mezglos. Datoru izmantošana ļauj risināt ļoti augstas kārtas šāda tipa uzdevumus.

Aplūkosim sijas izlieces liekuma modelēšanu ar galīgo diferenču metodi (GDM).

Dotas trīs izlieces ordinātas sijas liektai asij (zīm.1.1.).

$$w(x) = ax^2 + bx + c \quad (1.1)$$

Koordinātu sākumu pārvietosim uz centrālo ordināti w_c . Robežnosacījumi tad būs

$$w(-\Delta x) = w_{c-1} \quad (1.2)$$

$$w(0) = w_c \quad (1.3)$$

$$w(\Delta x) = w_{c+1} \quad (1.4)$$

Aprēķinot konstantu a , b , un c vērtības, iegūstam

$$w(x) = \frac{(w_{c+1} - 2w_c + w_{c-1})}{2(\Delta x)^2} x^2 + \frac{(w_{c+1} - w_{c-1})}{2\Delta x} x + w_c \quad (1.5)$$

Diferencējot dabū

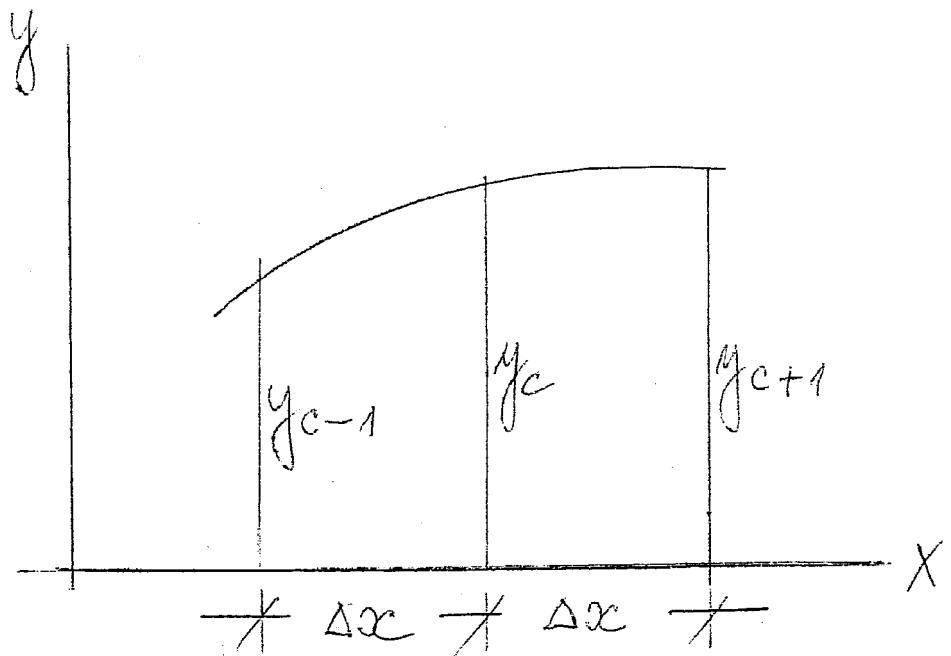
$$w''' = \frac{w_{c+1} - 2w_c + w_{c-1}}{(\Delta x)^3} \quad (1.6)$$

§1.2. Locīklās balstītas sijas analīze

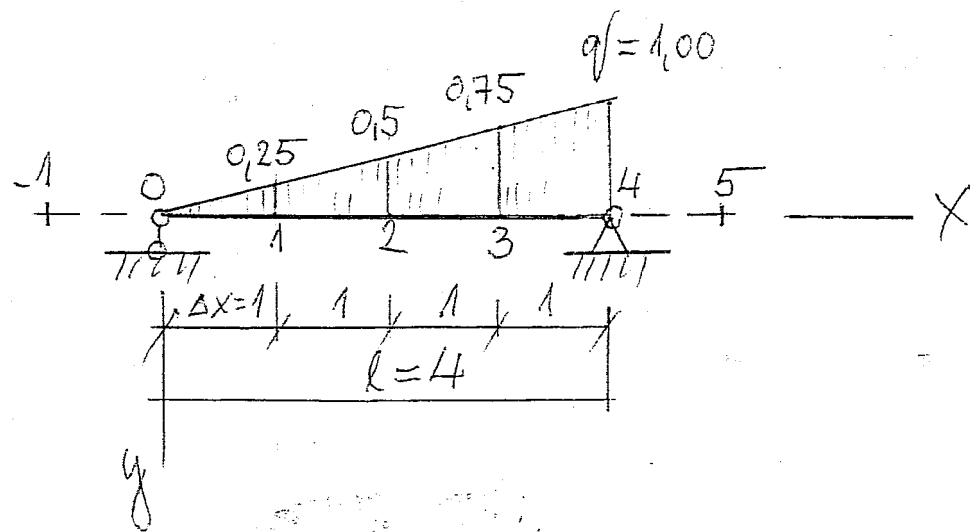
No materiālu pretestības kursa zināms, ka sijas ar lieces stingumu EI_x , lieces momentu $M(x)$ un izlieci $y(x)$, ja slodze $q(x)$, saista diferenciālvienādojumu sistēma:

$$M''(x) + q(x) = 0 \quad (1.7)$$

$$w''(x) + \frac{M(x)}{EI_{(x)}} = 0 \quad (1.8)$$



Zīm.1.1. Liekuma aproksimācija



Zīm.1.2.

Ja atvasinājumus vienādojumos (1.7) un (1.8) atvieto ar galīgām diferencēm mezglam i, tad dabū

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) + q_i = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{M_i}{EI_i} = 0 \quad (1.10)$$

Piemērs 1. Aprēķināsim siju, kas parādīta zīm.1.2. [6].

Sadalām siju 4 vienādās daļās. Katram iekšējam mezglam uzrakstam vienādojumu (1.9), ievērojot robežnosacījumus $M_0 = 0$ un $M_4 = 0$:

$$\begin{aligned} -2M_1 + M_2 + 0,25 &= 0 \\ M_1 - 2M_2 + M_3 + 0,50 &= 0 \\ M_2 - 2M_3 + 0,75 &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Atrisinot atrud $M_1 = 0,625$, $M_2 = 1,000$, $M_3 = 0,875$. Šie rezultāti precīzi.

Sastādot (1.10) tipa vienādojumus mezgliem 1,2,3, un ievērojot robežnosacījumus $w = 0$ un $w_4 = 0$ dabū

$$\begin{aligned} -2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + 0,625 &= 0 \\ \bar{w}_1 - 2\bar{w}_2 + \bar{w}_3 + 1,000 &= 0 \\ \bar{w}_2 - 2\bar{w}_3 + 0,875 &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

kur

$$\bar{w}_i = EIy_i$$

Atrisinot sistēmu (1.10) dabū

$$\bar{w}_1 = 1,1875 \quad \bar{w}_2 = 1,7500 \quad \bar{w}_3 = 1,3125$$

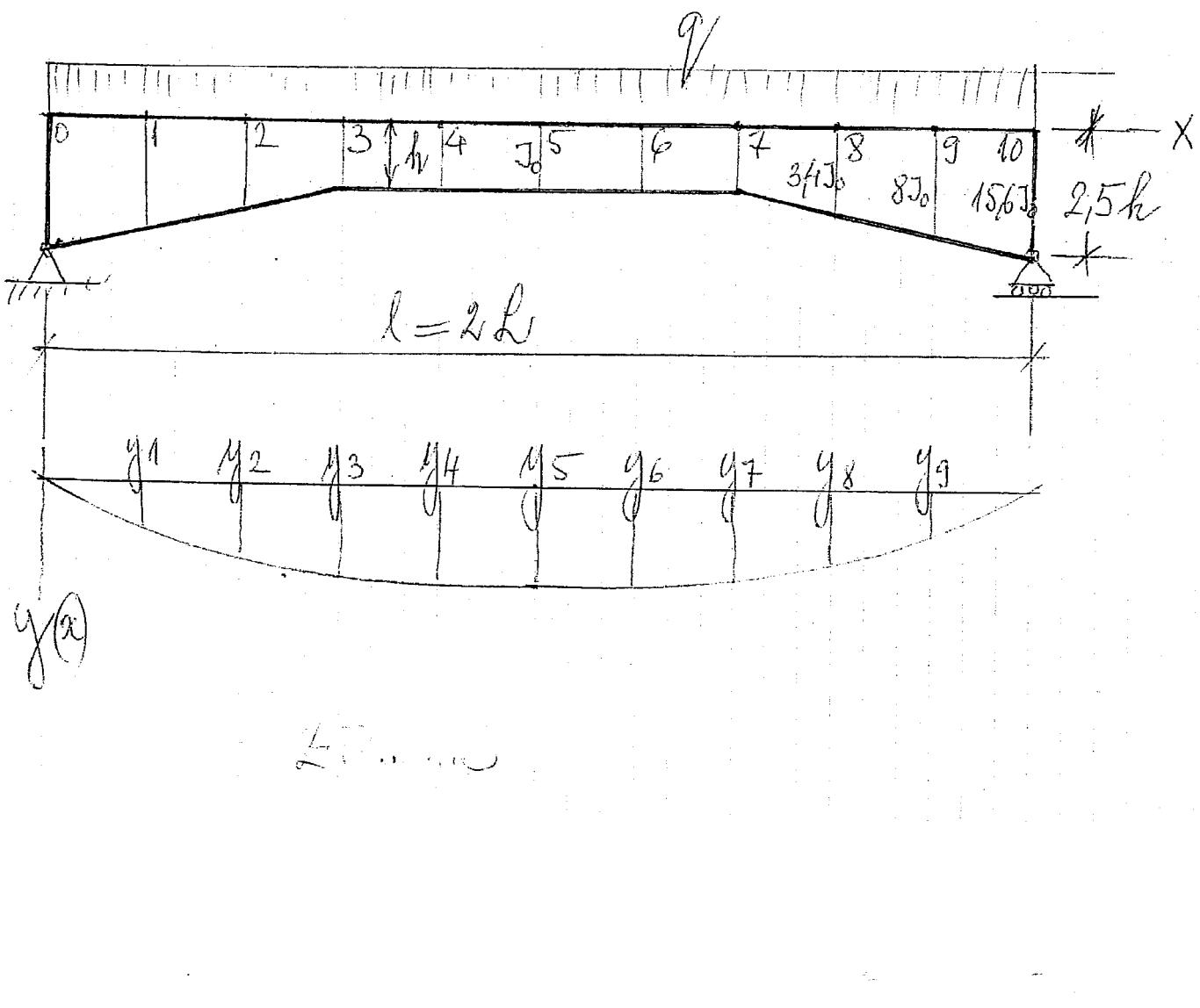
Maksimālā kļūda pret precīzo rezultātu - 5,9%.

Piemērs 2. Aprēķināt zīm.1.3 parādītās sijas izlieces [4].

Aprēķinot (1.9) lieces momenti punktos 1...9 šādi:

$$M_1 = 0,36 \frac{qL^2}{2}; \quad M_2 = 0,64 \frac{qL^2}{2}; \quad M_3 = 0,84 \frac{qL^2}{2}; \quad M_4 = 0,96 \frac{qL^2}{2}; \quad M_5 = \frac{qL^2}{2}$$

Vienādojuma (1.10) atrisinājumu var izteikt matricu formā:



Zim.1.3.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{Bmatrix} = -\frac{qL^4}{50EI_0} \begin{Bmatrix} 0,045 \\ 0,19 \\ 0,84 \\ 0,96 \\ 1,0 \\ 0,96 \\ 0,84 \\ 0,19 \\ 0,045 \end{Bmatrix}$$

Ievērojot simetriju $w_1 = w_9$; $w_2 = w_8$; $w_3 = w_7$; $w_4 = w_6$
dabū rezultātu:

$$w_1 = w_9 = -0,6 \frac{qL^4}{12EI_0}$$

$$w_2 = w_8 = -1,2 \frac{qL^4}{12EI_0}$$

$$w_3 = w_7 = -1,8 \frac{qL^4}{12EI_0}$$

$$w_4 = w_6 = -2,1 \frac{qL^4}{12EI_0}$$

$$w_5 = -2,2 \frac{qL^4}{12EI_0}$$

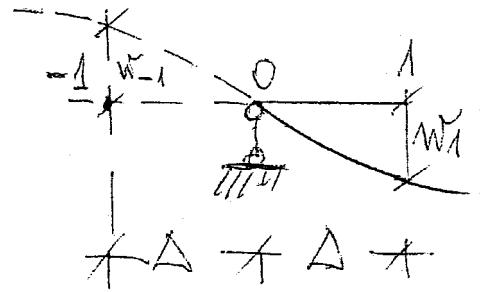
§1.3. Statiski nenoteicamas sijas ar piemēru

Dažreiz GDM aprēķinos jāizmanto fiktīvi mezglu punkti, kuri atrodas ārpus konstrukcijas. Ja sija brīvi (locīklveidīgi) balstīta uz nekustīga balsta, tad (zīm.1.4), ja $x=0$ $w_0=0$ $w_0''=0$ saskaņā ar (1.10) $w_0=0$, $w_{-1}+w_1=0$ un $w_{-1}=-w_1$

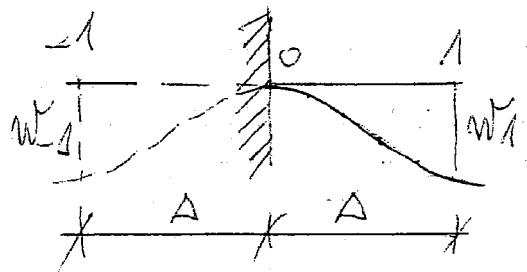
Līdzīgi dabū iespīlētam balstam (zīm.1.5.):

$$\text{ja } x=0 ; w_0=0 \quad w_0'=0 \quad \text{un} \quad w_0=0 ; w_1-w_{-1}=0$$

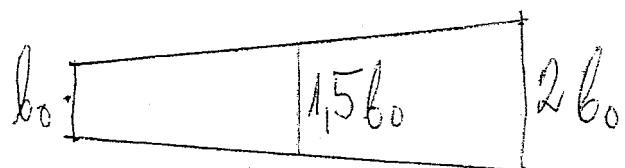
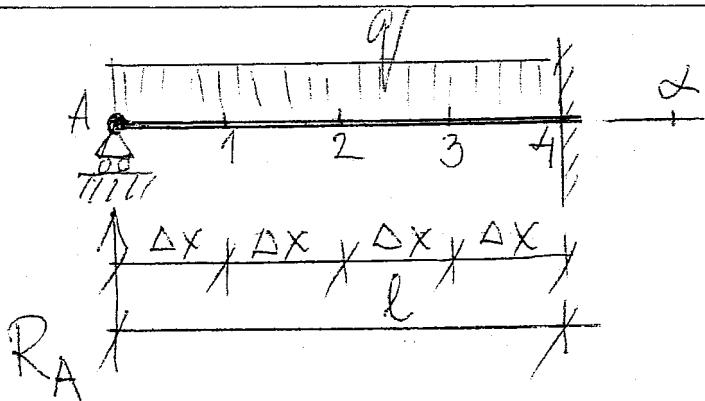
Piemērs 3 [5]. Apskatīsim statiski nenoteicamu siju AB (zīm.1.6) ar mainīgu platumu $b = \left(1 + \frac{x}{l}\right)b_0$, kas punktā A brīvi balstīta, bet B iespīlēta un slogota ar vienmērīgu slodzi q, sadalīta četros posmos $\Delta x = \frac{l}{4}$.



Zim.1.4.



Zim.1.5.



Zim.1.6.

Problēmas vienādojums

$$w'' = -\frac{M_x}{EI} \quad (1.13)$$

GDM vienādojumos iekļausim bez izliecēm w_1, w_2, w_3 un w_4 arī nezināmo reakciju R_A un ievērosim, ka $w_2 = w_3$.

Izskaitīsim inerces momentus un lieces momentus mezglos 1,2,3 un 4

$$I_1 = 1,25I_0; \quad I_2 = 1,5I_0; \quad I_3 = 1,75I_0; \quad I_4 = 2,00I_0; \quad I_0 = \frac{b_0 h^3}{12}$$

$$M_1 = R_A \Delta x - \frac{q(\Delta x)^2}{2}; \quad M_2 = 2R_A \Delta x - 2q(\Delta x)^2;$$

$$M_3 = 3R_A \Delta x - 4,5q(\Delta x)^2; \quad M_4 = 4R_A \Delta x - 8q(\Delta x)^2$$

Atrisinoša vienādojumu sistēma būs:

$$-2w_1 + w_2 = -\frac{\left(R_A \Delta x - \frac{q(\Delta x)^2}{2}\right)(\Delta x)^2}{1,25EI_0} \quad (1.14)$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = -\frac{(2R_A \Delta x - 2q(\Delta x)^2)(\Delta x)^2}{1,50EI_0} \quad (1.15)$$

$$w_2 - 2w_3 = -\frac{(3R_A \Delta x - 4,5q(\Delta x)^2)(\Delta x)^2}{1,75EI_0} \quad (1.16)$$

$$2w_3 = -\frac{(4R_A \Delta x - 8q(\Delta x)^2)(\Delta x)^2}{2,00EI_0} \quad (1.17)$$

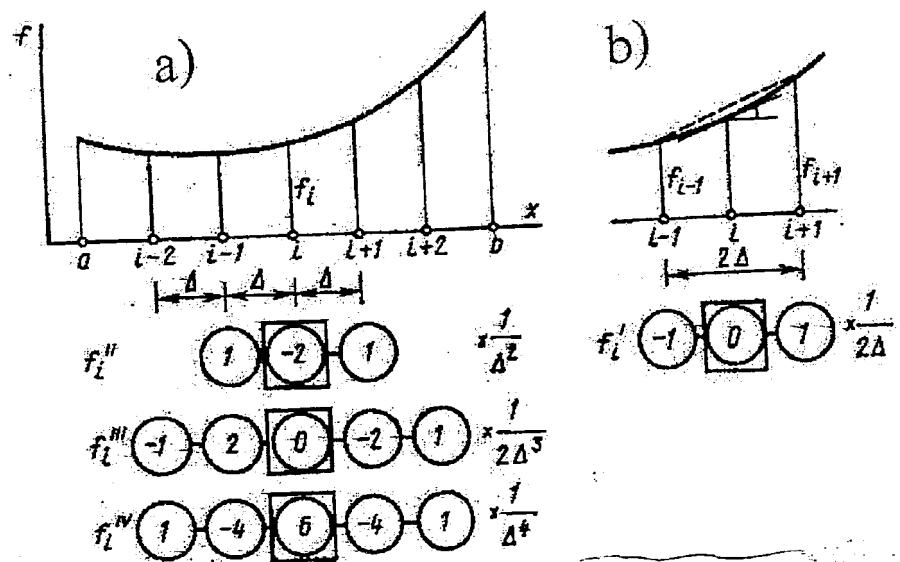
Atrisinot dabū $R_A = 0,386ql$ (precīzais rezultāts $0,363ql$), $M_4 = -0,114ql^2$ (precīzais rezultāts $0,137ql^2$).

Tālāk viegli izskaitīojamas izlieces w_1, w_2, w_3 .

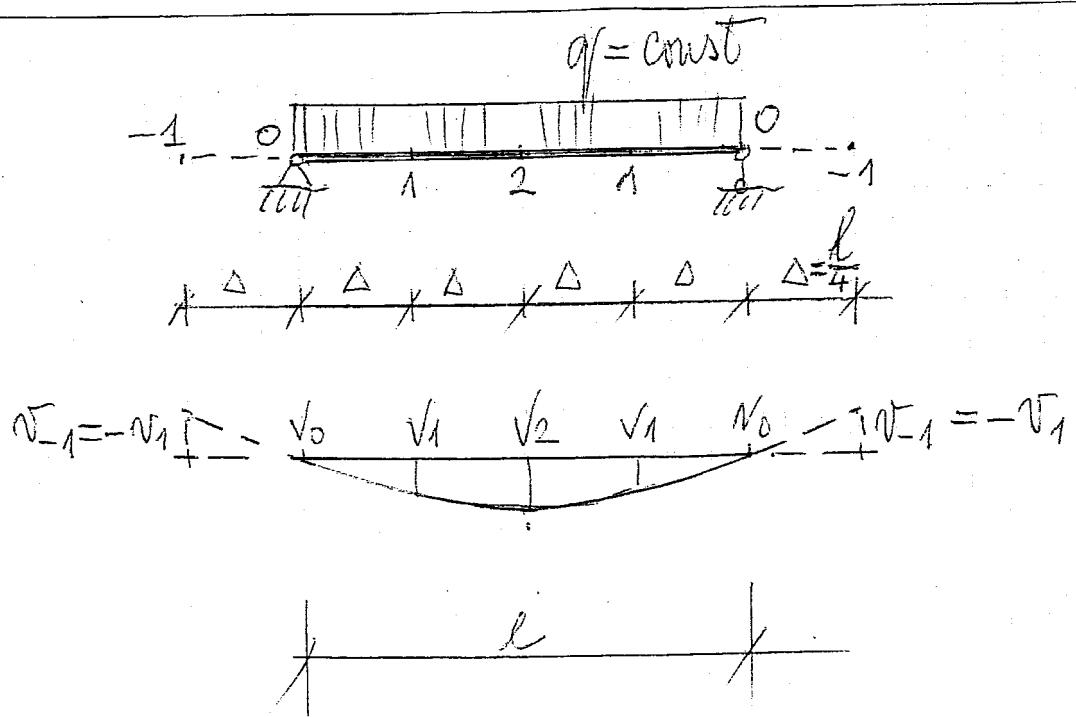
§1.4. GDM operatori augstāko kārtu atvasinājumiem

Apskatīsim atvasinājumu operatoru sastādīšanu viendimensiju funkcijai $f = f(x)$ (zīm.1.7). Apskatāmo apgabalu a b sadalīsim vienādos intervālos Δ un izmantosim Teilora rindu:

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + \frac{1}{2!} f''(x_0)\Delta^2 + \dots \quad (1.18)$$



Zīm.1.7. Operatoru konstruēšana viendimensiju funkcijai $f=f(x)$



Zīm.1.8.

Apskatīsim punktu $x_0 = x_i$ un pielietosim formulu (1.18) punktiem $i+1$ un $i-1$, kā arī paturam rindas trīs locekļus

$$f_{i+1} = f_i + f'_i \Delta + \frac{1}{2!} f''_i \Delta^2 \quad (1.19)$$

$$f_{i-1} = f_i - f'_i \Delta + \frac{1}{2!} f''_i \Delta^2 \quad (1.20)$$

Vispirms saskaitot un tad atņemot (19) un (20) dabū

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{\Delta} \quad (1.21)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2} \quad (1.22)$$

Trešo atvasinājuma operatoru atrod

$$f''' = \frac{d}{dx} (f'')_i = \frac{-f''_{i-1} + f''_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3} \quad (1.23)$$

Analogi

$$f'''' = \frac{d^2}{dx^2} (f'')_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4} \quad (1.24)$$

Iegūtie operatori simetriski un tos sauc par centrālām galīgām diferencēm.

Saglabājot Teilora rindā vairāk locekļu, var iegūt precīzākus rezultātus, bet to pielietošana sarežģītāka.

Piemērs 4 [9]. Simetriskā sijā atrast izlieces w mezglos 1 un 2. (zīm.1.8)

Uzdevuma lieces vienādojums

$$w'' = \frac{q}{EI} \quad (1.25)$$

Pielietojot operatora ceturtā atvasinājuma centru mezgliem 1 un 2, iegūst

$$\left. \begin{aligned} w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 &= \frac{q\Delta^4}{EI} \\ w_0 - 4w_{-1} + 6w_2 - 4w_1 + w_1 + w_0 &= \frac{q\Delta^4}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Ievērojot, ka $w_0 = 0$ un $w_{-1} = -w_1$ dabū

$$w_1 = 2,5 \frac{q\Delta^4}{EI} \text{ un } w_2 = 3,5 \frac{q\Delta^4}{EI}$$

§1.5. Plātnes izlieces

Bez izveduma pierakstam parciālo atvasinājumu operatorus divu mainīgo funkcijai $w = w(x, y)$ [6...9]

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 &\approx \frac{w_3 - w_1}{2\Delta}; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{w_4 - w_2}{2\Delta}; \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 &\approx \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{\Delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{w_4 - 2w_0 + w_2}{\Delta^2}; \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 &\approx \frac{w_7 - w_6 - w_8 + w_5}{4\Delta^2}; \\
\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 &\approx \frac{w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_{10}}{\Delta^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 \approx \frac{w_{11} - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9}{\Delta^4}; \\
\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &\approx \frac{(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0}{\Delta^4}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Apskatāmais apgabals un to mezglu numerācija ap punktu 0 doti zīmējumā 1.9.

Operatorus un tīklu ar mezgliem izmantosim plātnu lieces aprēķinam. Sofijas-Žermēnas plātnes lieces vienādojumu $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}$ [1] pierakstam galīgo diferenču formā:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &\approx \frac{1}{\Delta^4} \{w_1 - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9 + w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_{10} + \\
&+ 2[w_5 + w_6 + w_7 + w_8 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0]\} \approx \frac{q}{D}
\end{aligned}$$

Vienkāršojot punktam 0 dabū

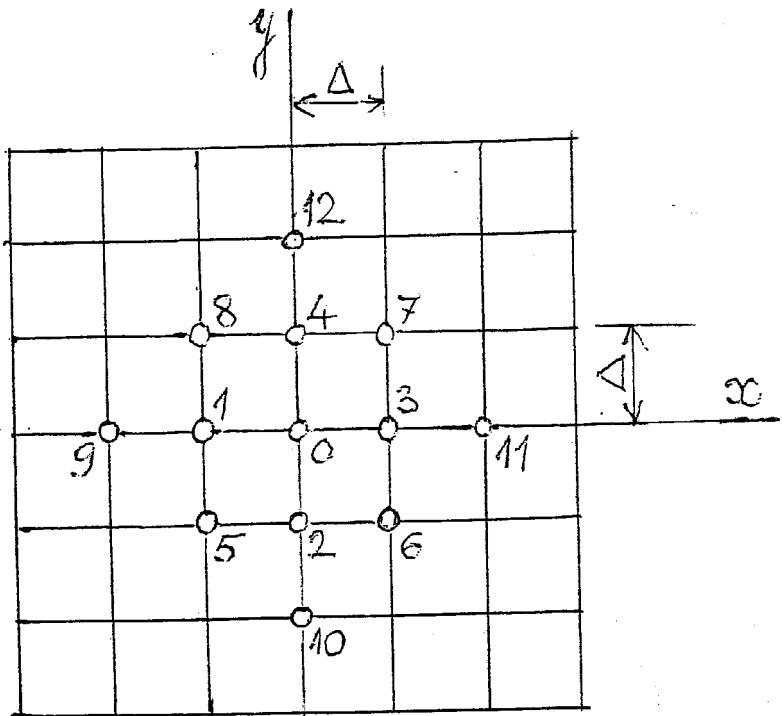
$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0 \Delta^4}{D} \tag{1.28}$$

kur q_0 - spiediens 0 punktā.

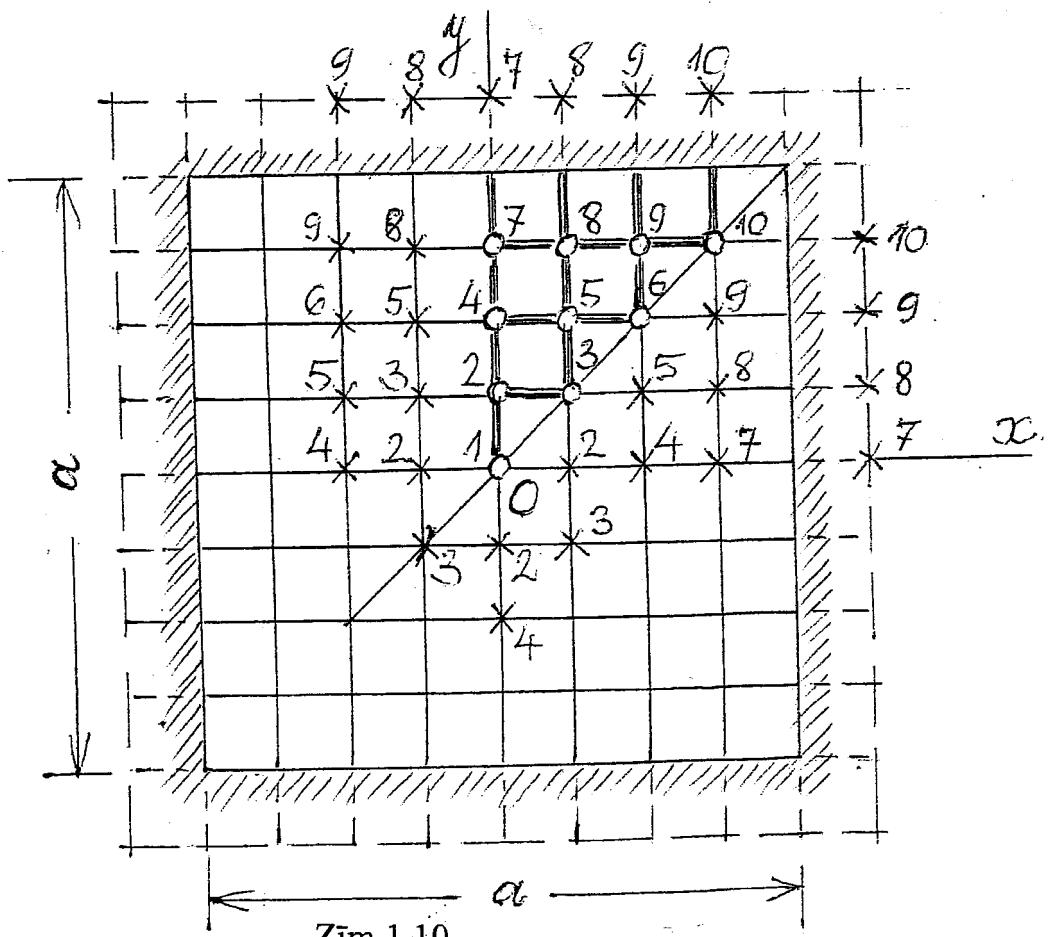
Piemērs 5 [8]. Kvadrāta formas plātnes liece ar iespīlētām malām un vienmērīgu šķērrslodzi $q = q_0$. Plātnē ar tīklu un mezglu punktiem parādīta zīm.1.10.

Sastādot vienādojumus jāievēro simetrija pret asīm x , y un pret diagonāli. Robežnosacījumi uz malām $x = \pm \frac{a}{2}$ un $y = \pm \frac{a}{2}$ ir $w=0$, $\partial w / \partial x = 0$, $\partial w / \partial y = 0$. Kontūra mezglos izlieces ir nulles, bet izlieces pirms un pēc kontūra punktos vienādas, simetriskas.

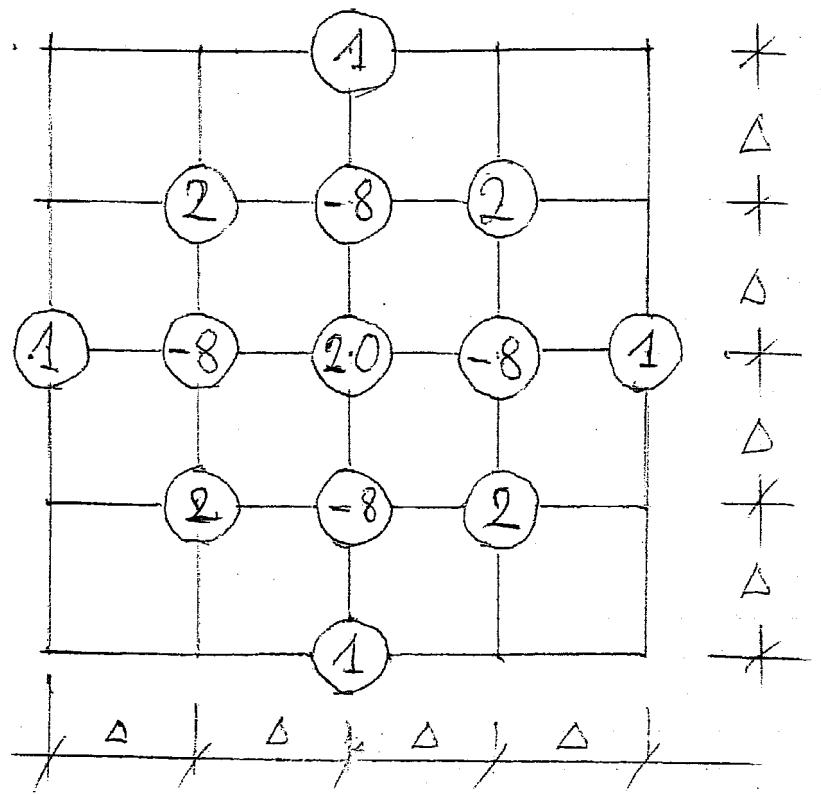
Plātnes lauks sadalīts tīklā ar soli $\Delta = a/8$. Simetrijas dēļ izlieces jāaprēķina desmit mezglos: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, kas atzīmēti ar aplišiem. Nepieciešams sastādīt desmit (28) tipa vienādojumus. Koeficientu vērtības mezglu punktos ap centrālo mezglu shēmatiski parādītas zīm.11. Izmantojot 1.11.zīmējuma shēmu, var sastādīt līdzsvara vienādojumus galīgo diferenču formā punktiem 1...10, skat.1.10.zīm.



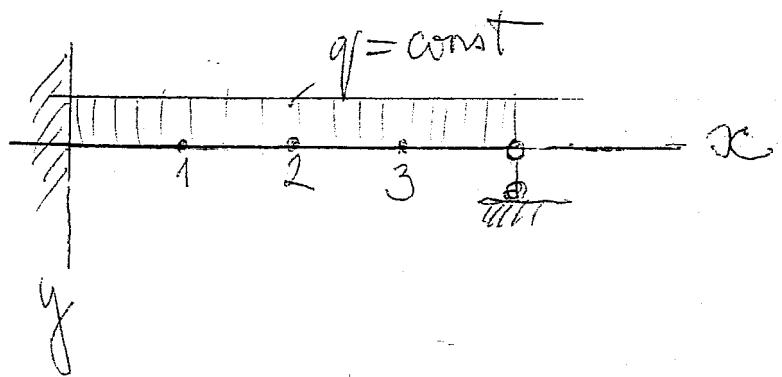
Zim. 1.9.



Zim. 1.10.



Zim.1.11.



Zim.1.12.

Mezglam 1 iegūsim:

$$20w_1 - 8(w_2 + w_2 + w_2 + w_2) + 2(w_3 + w_3 + w_3 + w_3) + (w_4 + w_4 + w_4 + w_4) = \frac{q_0 a^2}{4096D}$$

Analogi mezglam 2 iegūstam:

$$20w_2 - 8(w_3 + w_{32} + w_1 + w_4) + 2(w_2 + w_2 + w_5 + w_5) = \frac{q_0 a^2}{4096D}$$

Sastādot līdzīgi vienādojumus pārējiem mezgliem, iegūstam 10 vienādojumu sistēmu, kura matricu formā būs šāda:

$$R\bar{w} = \bar{R}q \quad (1.29)$$

kur

$$R = \begin{bmatrix} 20 & -32 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 25 & 16 & -8 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 22 & 4 & -16 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 4 & 20 & -16 & 2 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -8 & 23 & -8 & 2 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & 0 & 20 & 0 & 4 & -16 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 4 & 0 & 21 & -16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -8 & 2 & -8 & 22 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -8 & 1 & -8 & 23 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{bmatrix} \quad \bar{R}_q = \frac{4\Delta^2}{D} \begin{bmatrix} \frac{q_0 a^4}{4096D} \\ \vdots \\ \frac{q_0 a^4}{4096D} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Atrisinot 10 vienādojumu sistēmu dabū izlieces 1...10 punktos daļās no $q_0 a^4 / D$

$$w_1 = 0,0008412$$

$$w_2 = 0,0007634$$

$$w_3 = 0,0006767$$

$$w_4 = 0,0004870$$

$$w_5 = 0,0004933$$

$$w_6 = 0,0005118$$

$$w_7 = 0,0001499$$

$$w_8 = 0,0001609$$

$$w_9 = 0,0001705$$

$$w_{10} = 0,0000517$$

Rezultāti ~ 70% zemāki nekā precīzie. Precīzāku rezultātu iegūšanai nepieciešams sīkāks tīkls ar vairāk mezgliem.

§1.6. Kollokāciju metode

Saskaņā ar kollokāciju metodi izvēlētai aproksimācijas funkcijai uzdevuma vienādojums jāapmierina patvaļīgos galīga skaita punktos (kollokācijas punktos) un jāizpildās robežnosacījumiem. Metodes būtību noskaidrosim atrisinot piemēru.

Piemērs 6 [7]. Ar kollokācijas metodi noteiksim sijas (zīm.1.12) izlieces elastīgo līniju. Kollokācijas punktus izvēlēsimies vienādos attālumos $\Delta = l/4$. Uzdevuma lieces diferenciālvienādojums šāds:

$$EIw^{IV}(x) = q \quad (1.30)$$

Robežnosacījumi iespīlētam galam un nekustīgai locīklai šādi:

$$\text{Pie } x = 0 \quad w = w' = 0 \quad (1.31)$$

$$\text{Pie } x = l \quad w = w'' = 0 \quad (1.32)$$

Elastīgo līniju pieņemam pakāpju rindas veidā:

$$w(x) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{x}{l}\right)^k \quad (1.33)$$

Izteiksme (1.33) patvaļīgu a_k gadījumā neapmierina ne diferenciālvienādojumu (1.30), nedz arī robežnosacījumus (1.31) un (1.32). Tāpēc jāapmierina 4 robežnosacījumi un vienādojums (1.30) trijos kollokācijas punktos 1,2,3, tāpēc rindā (33) jāpatur 7 patvaļīgi locekļi, t.i.

$$w(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_4 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_5 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + a_6 \left(\frac{x}{l}\right)^6 \quad (1.34)$$

Ievietojot (34) robežnosacījumus (1.31) un (1.32) dabū

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 0; \quad a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (1.35)$$

Ievietojot rindu (1.34) vienādojuma kreisā pusē dabū:

$$24a_4 + 120a_5 \frac{x}{l} + 360a_6 \frac{x^2}{l^2} = \frac{\bar{q}l^4}{EI} \quad (1.36)$$

Pieprasam, lai slodze \bar{q} sakarībā (1.36) saskanētu ar doto q kollokācijas punktos $x_1 = \frac{l}{4}; \quad x_2 = \frac{l}{2}; \quad x_3 = \frac{3l}{4}$ (zīm.12).

Iegūstam bez sistēmas (1.35) četriem vienādojumiem vēl trīs:

$$\left. \begin{array}{l} 24a_4 + 30a_5 + 22,5a_6 = \frac{ql^4}{EI} \\ 24a_4 + 60a_5 + 90a_6 = \frac{ql^4}{EI} \\ 24a_4 + 90a_5 + 202,5a_6 = \frac{ql^4}{EI} \end{array} \right\} \quad (1.37)$$

Risinot sistēmas (1.35) un (1.37) kopā, iegūst:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{ql^4}{(16EI)}; \quad a_3 = -\frac{5ql^4}{(48EI)}; \quad a_4 = \frac{ql^4}{(24EI)}; \quad a_5 = a_6 = 0$$

Ievērojot atrastos koeficientus a_k un ievietojot tos (34) dabū:

$$w(x) = \frac{ql^4}{EI} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{5}{48} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 24 \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (1.38)$$

Formula (38) ir precīzs atrisinājums, jo tāpatīgi apmierina (1.30) un robežnosacījumus (1.31); (1.32). Metodes trūkums tas, ka kolokāciju punktus var izvēlēties patvalīgi un rezultāti būs ar dažādu precizitāti.

§1.7 Sijas sieniņas spriegumstāvokļa aprēķins ar GDM (plakanais uzdevums)

Plakanā uzdevuma risināšanā spriegumu noteikšanai definē sprieguma funkciju φ [8, 9, 10, 11]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (1.38)$$

Spriegumu aprēķins tagad noved pie elastības teorijas deformāciju nepārtrauktības vienādojuma atrisināšanas biharmoniskā vienādojuma formā

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (1.39)$$

Atrodot $\varphi(x, y)$ funkcijas, saskaņā ar (1.38) aprēķina spriegumus. Vienādojuma (1.39) kreisā puse vienlīdzīga ar Sofijas Žermēnas plātnu lieces vienādojuma kreiso pusi, bet labā puse vienāda ar nulli. Tātad vienādojuma atrisināšanai ar GDM var izmantot izteiksmi (1.28), kur $\varphi = w$, bet labo pusi pielīdzinot nullei.

Apskatam konkrētu piemēru: vienības biezuma plātnē augstas sieniņas veidā (sija – sieniņa) slogota ar vienmērīgi izkliedētu slodzi q (zīm.1.13).

Balsta reakcijas pieliktas apakšējos stūra punktos. Tīkls $5\Delta x 4\Delta$ un punktu numerācija parādīta zīm.1.13 (ievērota simetrija pret 0 -0).

Sastādīsim operatorus divu argumentu funkcijas $\varphi(x, y)$ parciālo atvasinājumu aprēķinam (zīm.1.14).

Izteiksmi $\varphi = \varphi(x, y)$ var traktēt kā virsmu ar ordinātām $\varphi(x, y)$ virs plaknes xy . Vertikālie šīs virsmas šķēlumi, paralēli x vai y , ir plaknes līknes, kuru atvasinājumi, piem., punktam k šādi:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{\Delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\varphi_d - 2\varphi_k + \varphi_b}{\Delta^2} \quad (1.40)$$

Atbilstošās operatoru shēmas dotas zīm.1.14. Summējot (1.40), dabūjam Laplasa operatora $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ izteiksmi galīgo diferenču veidā:

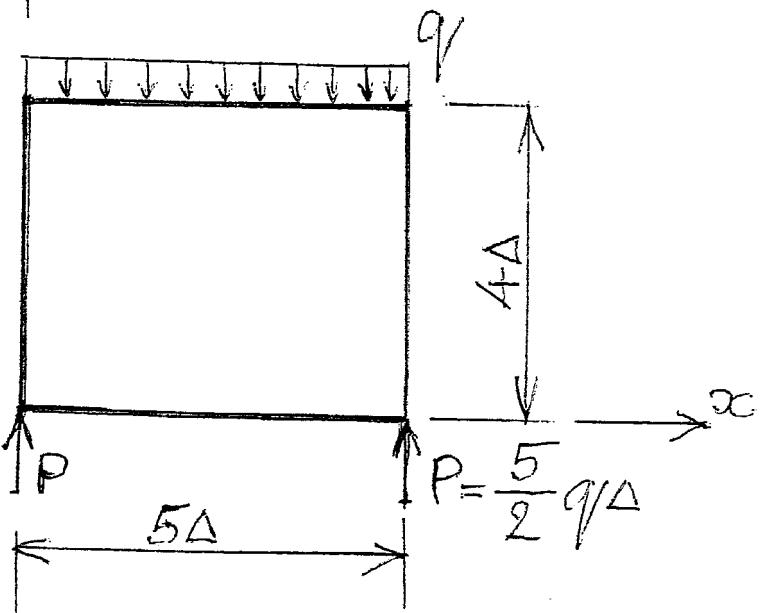
$$\left(\nabla^2 \varphi \right)_k = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d - 4\varphi_k}{\Delta^2} \quad (1.41)$$

operatora krustveida shēma dota zīm.1.14.

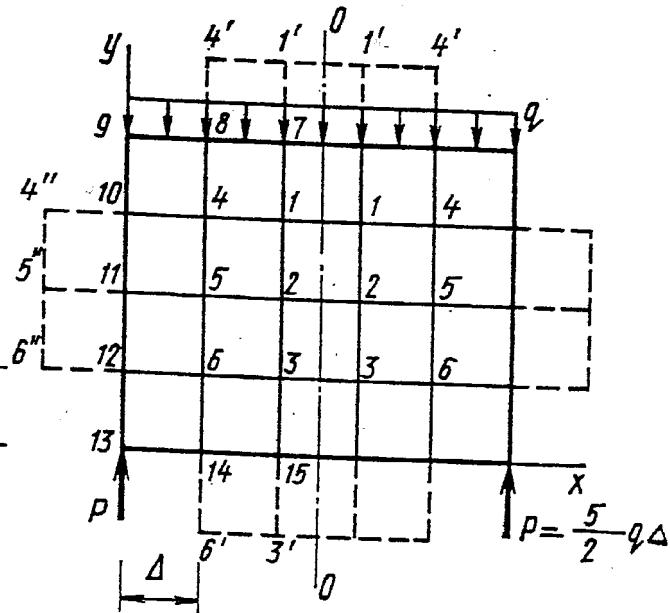
Pielietojot Laplasa operatoru (1.41) divas reizes dabū biharmonisko operatoru $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$:

$$\left(\nabla^2 \nabla^2 \varphi \right)_k = \nabla^2 (z)_k = \frac{z_a + z_b + z_c + z_d - 4z_k}{\Delta^2},$$

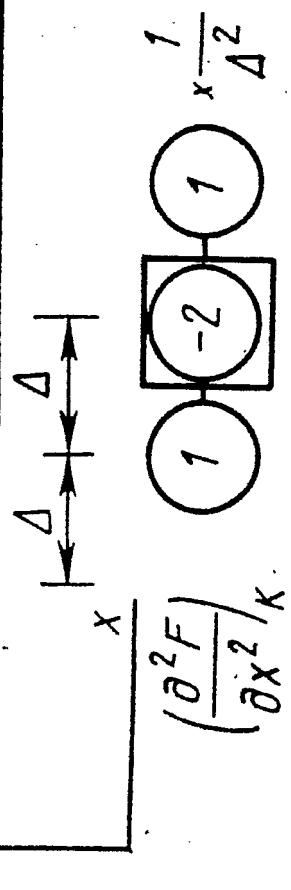
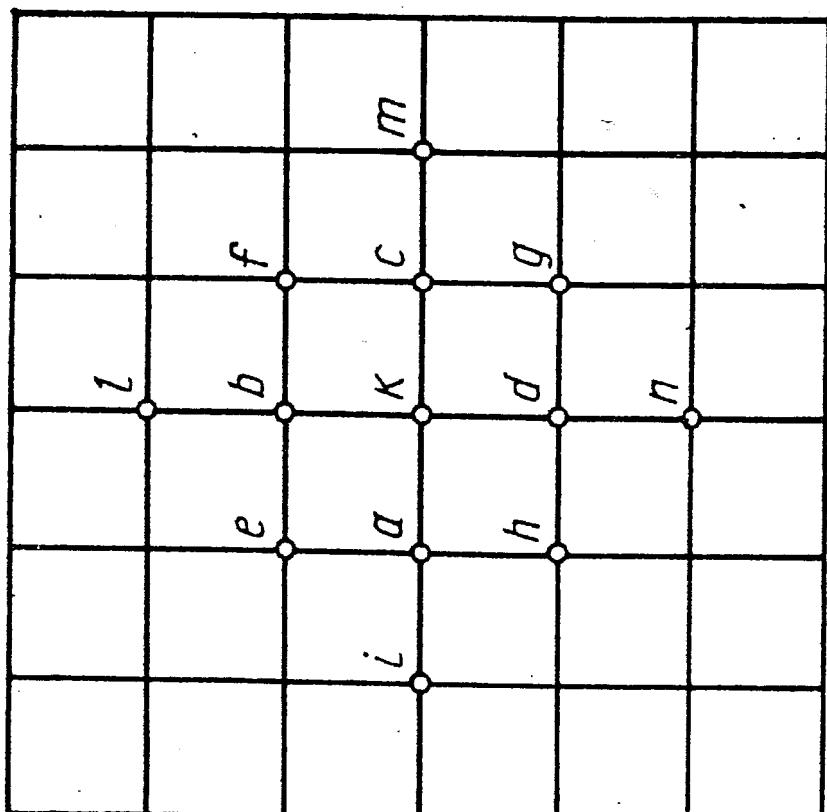
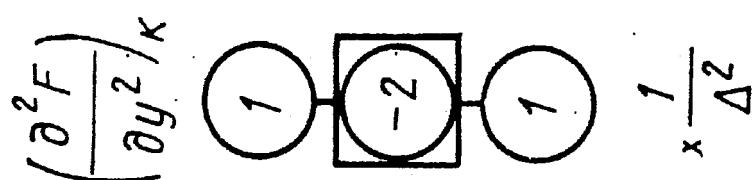
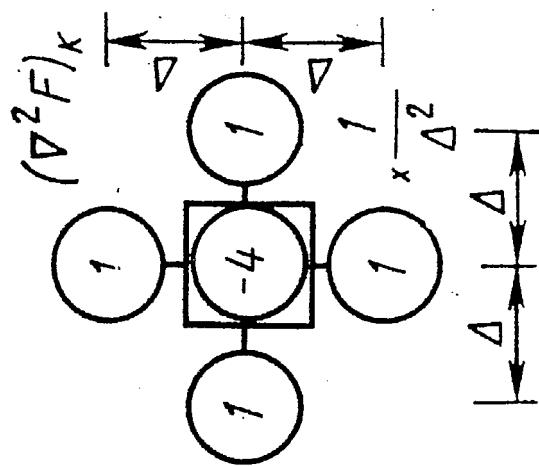
a)



b)



Zim.1.13.



Zim.1.14

kur $z_j = (\nabla^2 \varphi)_j$, $j = a, b, c, d, k$.

Šie punkti (a, b, c, d, k) jāpārklāj ar harmonisko operatoru „krusts”, lai dabūtu meklējamo formulu saskaitāmos, kas izteiktais ar ordinātēm φ . Pēc līdzīgo locekļu saskaitīšanas dabū:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \nabla^2 \varphi)_k &= \\ &= \frac{20\varphi_k - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + (\varphi_l + \varphi_m + \varphi_n + \varphi_i)}{\Delta^4} \quad (1.42) \end{aligned}$$

Biharmoniskā operatora shēma dota 1.15 zīm. Salīdzini ar formulu (1.28).

Otrā punktā atvasinājums dabūjams pēc shēmas:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_k = \frac{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_c}{2\Delta} = \frac{\varphi_h - \varphi_l + \varphi_j - \varphi_g}{4\Delta^2} \quad (1.43)$$

Attiecīgais operators parādīts 1.16.zīm.

Katram plātnes tīkla iekšējam mezglam, saskaņā ar operatoru 1.15. sastādam biharmoniskā vienādojuma galīgo diferenču vienādojumu

$$(\nabla^2 \nabla^2 \varphi)_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.44)$$

kur N – tīkla iekšējo mezglu skaits.

Vienādības (1.44) veido lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu pret mezglu ordinātēm φ_j . Tām vēl jāpievieno robežnosacījumi.

Ja uz plātnes kontūra dota slodze, tad robežnosacījumi var tikt formulēti izmantojot t.s. rāmja analogiju [8, 9, 10, 11]:

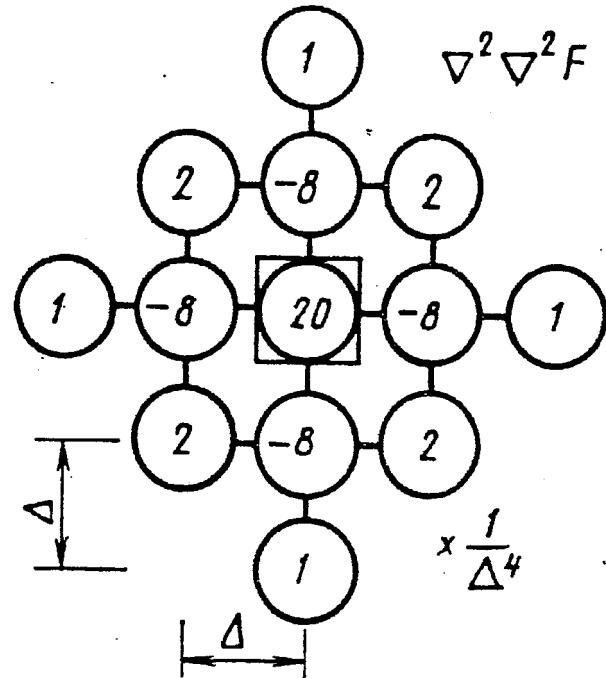
$$\varphi_k = M_k; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = N_k \quad (1.45)$$

Funkciju φ_k vērtības uz plātnes kontūra tiek aprēķinātas kā lieces momentu M_k ordinātas nosacītā rāmī, kura stieņu apveids saskan ar plātnes kontūru. Otrs (1.45) nosacījums, kas formulē φ atvasinājumu n normāles virzienā pret kontūru, ņauj izteikt aiz kontūra φ vērtības caur iekšējo punktu ordinātām.

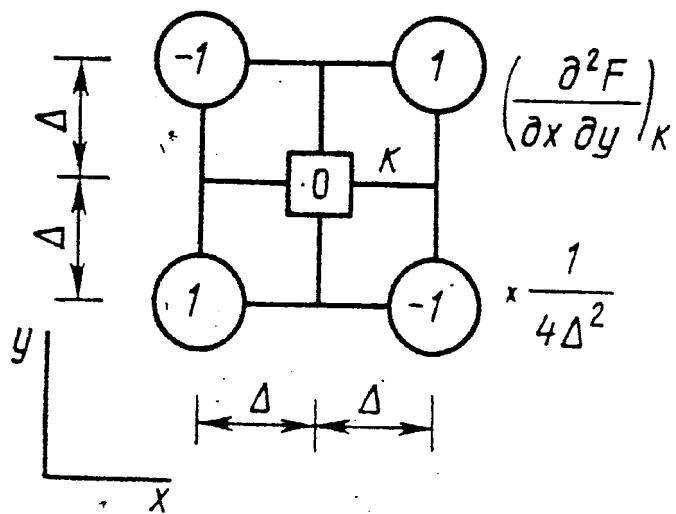
Atzīmēsim, ka M un N aprēķināšanai rāmja šķēlumos var izmantot jebkuru statiski noteicamu un ģeometriski nemainīgu rāmi.

Rāmi var šķelt vai ievietot tajā locīklas jebkurā šķēlumā, bet tam jālīdzsvaro dotā slodze.

Ja momenta epīras atlikas no stieptās zonas atrodas plātnes kontūra iekšpusē, tad $\varphi_k = M_k > 0$ un otrādi. Ja stiepes ass spēks pieņemts par pozitīvu, tad $(\partial \varphi / \partial n) = N_k > 0$ un attiecīgi otrādi.



Zim.1.15



Zim.1.16

Apskatīsim kontūra punkta k (zīm.1.17), φ_k vērtību šajā punktā līdzinās lieces momentam.

Biharmonisko operatoru (zīm.1.15) pārklāsim iekšējam punktam A, kurā ietilps aizkontūra punkts B. Ordinātu φ_B atradīsim no pirmās atvasinātās operatora un (1.45):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = \frac{-\varphi_A + \varphi_B}{2\Delta} = N_k$$

no kurienes

$$\varphi_B = \varphi_A + 2N_k \Delta \quad (1.46)$$

Rezultātā uzklājot biharmonisko operatoru iekšējiem mezgliem, iegūsim algebrisku vienādojumu sistēmu, kuras nezināmie būs iekšējo mezglu φ vērtības. Pēc tam atrodam spriegumus visos mezglos

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (1.47)$$

Atbilstošie operatori spriegumu aprēķināšanai saskaņā ar zīm.1.14 un 1.16 doti zīm.1.18.

Zīmējumā 1.19 parādīts statiski noteicams rāmis, kura apveids sakrīt ar uzdevumā dotās plātnes kontūru, kas slogots ar doto slodzi q un balsta reakcijām $P = \frac{5}{2}q\Delta$, kā arī atbilstošās momentu M un normālā spēka N epīras. Saskaņā ar (1.45) kontūra punktiem būs

$$\varphi_1 = 3q\Delta^2; \quad \varphi_8 = 2q\Delta^2; \quad \varphi_9 = \dots = \varphi_{15} = 0 \quad (a)$$

Izmantojot (1.46) dabū φ izteiksmi aizkontūra punktiem

$$\varphi_{1'} = \varphi_1; \quad \varphi_{4'} = \varphi_4 \quad \varphi_{4''} = \varphi_4 - 5q\Delta^2; \quad \varphi_{5'} = \varphi_5 - 5q\Delta^2 \quad (b)$$

$$\varphi_{6'} = \varphi_6; \quad \varphi_{3'} = \varphi_3 \quad \varphi_{6''} = \varphi_6 - 5q\Delta^2$$

Pārklājot biharmonisko operatoru (zīm.1.15) iekšējiem punktiem 1... 6 dabū algebrisku vienādojumu sistēmu. Piemēram punkatm1

$$20\varphi_1 - 8(\varphi_4 + \varphi_7 + \varphi_1 + \varphi_2) + 2(\varphi_8 + \varphi_7 + \varphi_2 + \varphi_6) + \varphi_{1'} + \varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_{10} = 0$$

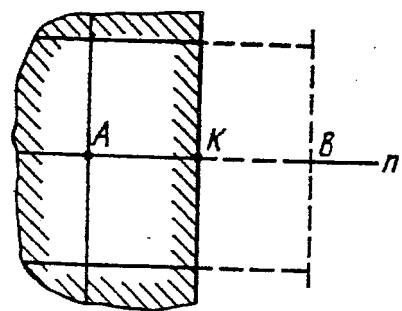
Ievērojot robežnosacījumus (a) un (b) būs

$$13\varphi_1 - 6\varphi_2 + \varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 = 14q\Delta^2$$

Sastādot vienādojumus visiem iekšējiem punktiem 1... 6 dabū vienādojumu sistēmu

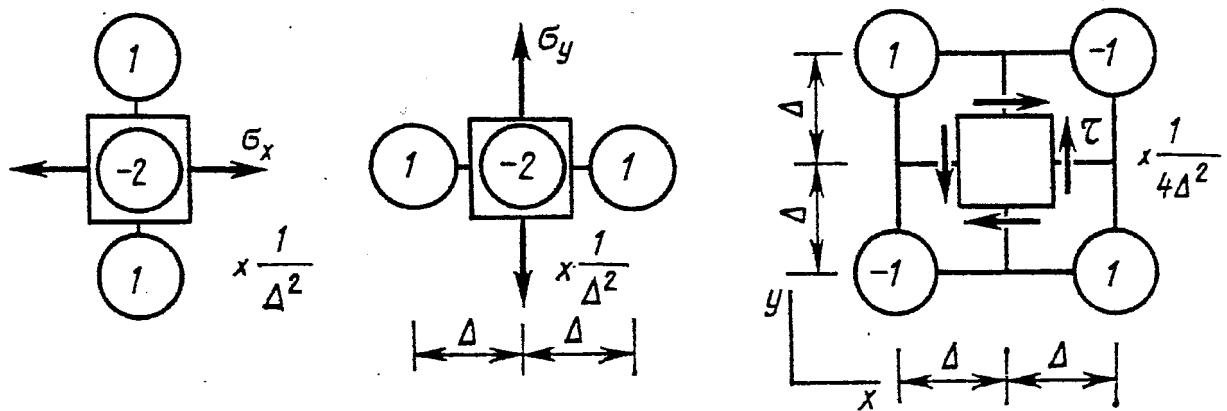
$$A\vec{\varphi} = \vec{b}, \quad (c)$$

kur

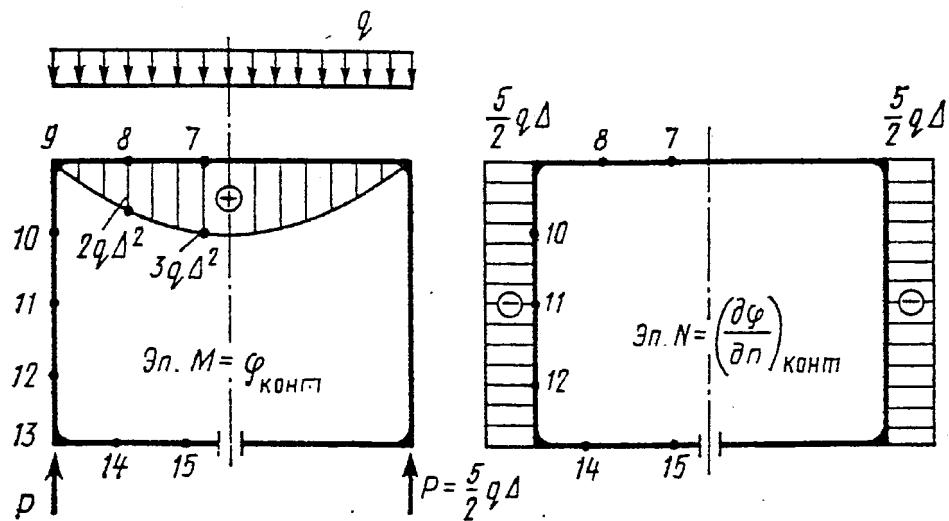


$$\frac{1}{2\Delta} x \left(-1 \right) \rightarrow 0 \rightarrow \left(1 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_K$$

Zim.1.17



Zim.1.18.



Zim.1.19

<u>I</u>					
	1,849	2,675	2,675	1,849	
0	2,0	3,0	3,0	2,0	0
-3,151	0	1,849	2,675	2,675	1,849
-3,551	0	1,449	1,937	1,937	1,449
-4,225	0	0,775	0,883	0,883	0,775
<u>II</u>					
0	0	0	0	0	0
	0,775	0,883	0,883	0,775	

$x q \Delta^2$

φ_i

Zim.1.20

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & 1 & -7 & 2 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 2 & -7 & 2 \\ 1 & -6 & 13 & 0 & 2 & -7 \\ -7 & 2 & 0 & 22 & -8 & 1 \\ 2 & -7 & 2 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & -8 & 22 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3 \\ 0 \\ 15 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} q \Delta^2$$

Vienādojuma (c) kopā ar (a) un (b) atrisinājums parādīts zīm.(1.20) skaitļu veidā mezglu punktos.

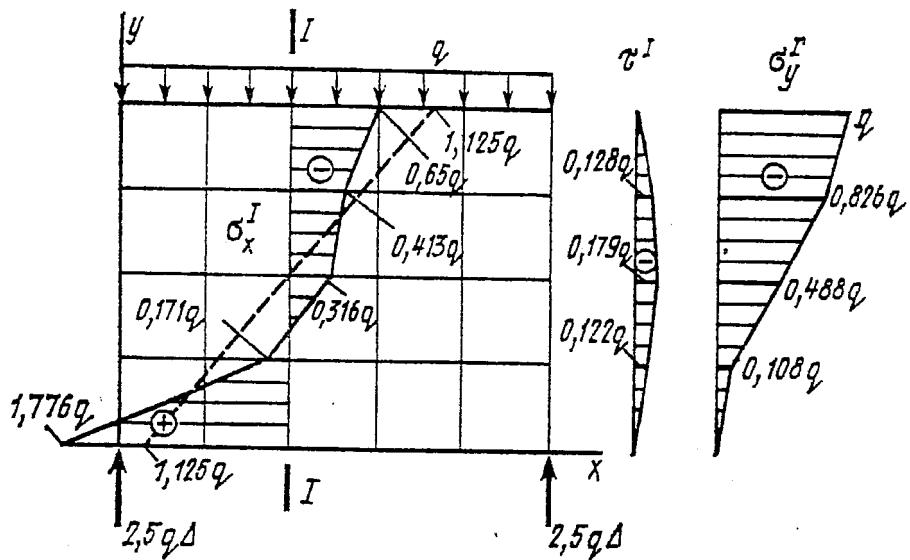
Aprēķināsim spriegumus līniju I – I un II – II mezglos (zīm 1.21 un 1.13). Izmantojot operatorus (zīm.1.18) dabū spriegumus

$$\sigma_x^{(7)} = (2,675 - 2 \cdot 3 + 2,675) \frac{q \Delta^2}{\Delta^2} = -0,65q$$

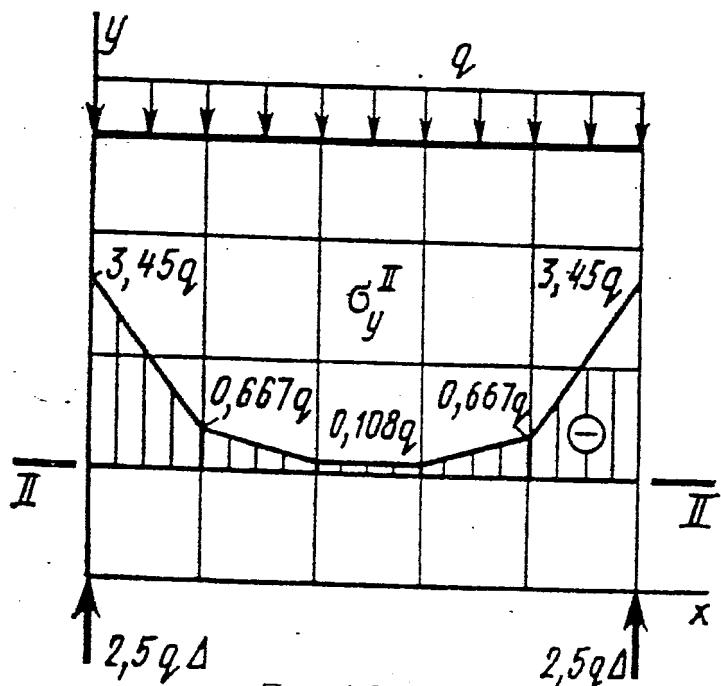
$$\sigma_y^{(7)} = (2 - 2 \cdot 3 + 3) \frac{q \Delta^2}{\Delta^2} = -q$$

$$\tau^{(7)} = (1,849 + 2,675 - 1,849 - 2,675) \frac{q \Delta^2}{4 \Delta^2} = 0$$

Rezultāti parādīti zīm. 1.21 un 1.22, kur tie salīdzināti ar materiālu pretestības formulu izskaitlojumiem.



Zim. 1.21



Zim. 1.22

§1.8. Dinamikas uzdevumu risināšana ar GDM

Sastādīsim pastāvīgu stinguma EI un ar pastāvīgu pa (sijas) garumu sadalītas masas m (m – garuma vienības masa) sijas izlieces funkciju $w = w(x, t)$ šķērssvārstību laikā (zīm.1.23). Ja uz siju iedarbojas izkliedēta bezmasas slodze $q = q(x, t)$, tad ievērojot inerces spēkus (masa reizināta ar paātrinājumu $I = -m \cdot \ddot{w}$) uz sijas garuma vienību kustības laikā summārā ārējās slodzes intensitāte būs

$$p = q - m\ddot{w} \quad (1.39)$$

kur \ddot{w} – sijas izlieces paātrinājums $\ddot{w} = \frac{dy^2}{dt^2}$.

Divreiz diferencējot pēc x sijas liekuma izteiksmi

$$w'' = -\frac{M}{EI} \quad \text{jeb} \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M \quad (1.40)$$

iegūstam

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = p$$

Pastāvīga šķērsgriezuma sijai pēc pārveidojumiem dabū

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1.41)$$

Šo vienādojumu plaši lieto daudzu sijas dinamikas uzdevumu risināšanai. Atrasto vienādojumu (1.41) izmantosim pastāvīga šķērsgriezuma sijas brīvo svārstību (pašsvārstību) frekvences aprēķināšanai.

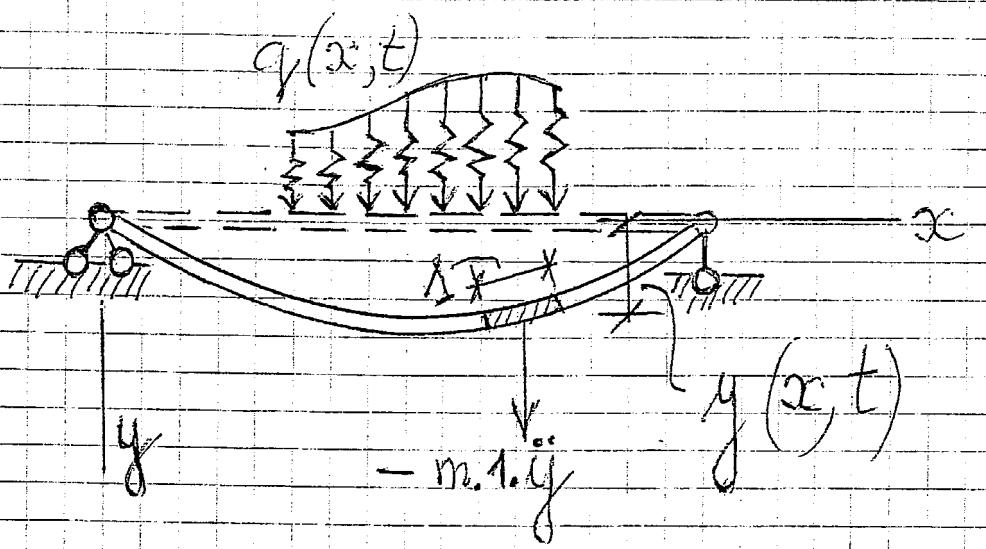
Svārstības sauc par brīvām, ja tās izsauc tikai sākuma impulss. Šajā gadījumā uz siju iedarbosies divi spēki – inerces spēki $I(x, t) = -m\ddot{w}(x, t)$, kas proporcionāli masai un tās paātrinājumam, un elastības spēki.

Pastāvīga šķērsgriezuma sijai $EI = \text{const}$ ārējais spēks pašsvārstību gadījumā būs tikai inerces spēks

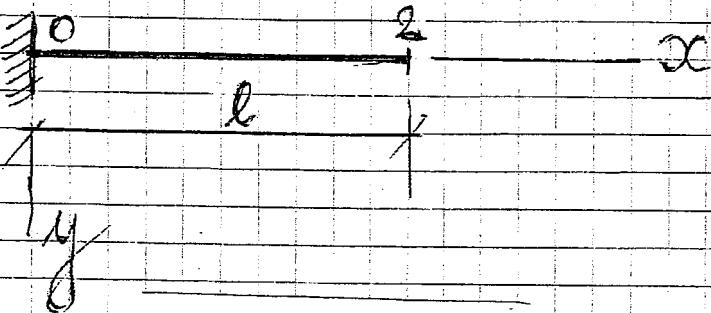
$$q(x, t) = I(x, t) = -m\ddot{w}(x, t) \quad (1.42)$$

Atdalot mainīgos, atrisinājumu meklējam harmonisko svārstību klasē ar frekvenci ω (Furjē metode); svārstības sauc par harmoniskām, ja kustību apraksta trigonometriskās funkcijas. Mainīgo atdalīšana nozīmē, ka atrisinājumu meklē kā divu viena argumenta funkciju reizinājumu, t.i. $w(x, t) = f(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ jeb $w = f(x) \cdot T(t)$, kur $T(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, un kur $f(x)$ – amplitūda, kas nosaka svārstību formu, ir tikai garenvirziena koordinātes x funkcija un nav laika t funkcija, ω – pašsvārstību cikliskā frekvence, φ – sākuma fāze.

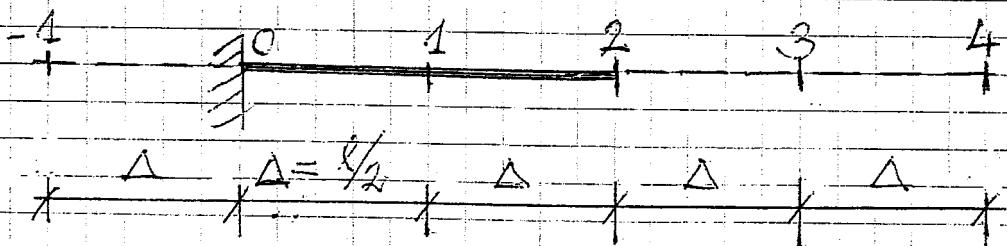
Tātad atrisinājumu meklējam formā



Zim.1.23



Zim.1.24



Zim.1.25

$$y(x,t) = f(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.43)$$

Ievietojot (1.43) izteiksmē (1.41) dabū parasto diferenciālvienādojumu

$$f''''(x) - \frac{m\omega^2}{EI} f(x) = 0, \quad (1.44)$$

kas izsaka sijas līdzvara maksimālās amplitūdas stāvoklī, kad $\cdot \sin(\omega t + \varphi) = 1$.

Sadalot siju vienāda garuma Δ posmos, un izmantojot centrālo diferenču izteiksmes (1.21), (1.22), (1.23) un (1.24) (skat.zīm.1.7)

$$f'_i = \frac{1}{2\Delta}(-f_{i-1} + f_{i+1}) \quad (1.21)$$

$$f''_i = \frac{1}{\Delta^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) \quad (1.22)$$

$$f'''_i = \frac{1}{2\Delta^3}(-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}) = 0 \quad (1.23)$$

$$f''''_i = \frac{1}{\Delta^4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) = 0 \quad (1.24)$$

vienādojums (1.44) saskaņā ar (1.24) būs

$$f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2} - \alpha f_i = 0, \text{ kur } \alpha = \frac{m\omega^2}{EI} \Delta$$

jeb

$$f_{i-2} - 4f_{i-1} + (6 - \alpha)f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2} = 0 \quad (1.45)$$

Tālāk risināšanas metodiku aplūkojam aprēķinot konsolsijas (zīm.1.24) pašsvārstību frekvenci ω . Sadalām siju divos posmos (zīm.1.25)

Sastādām vienādojumus (1.45) punktiem 1 un 2

$$\begin{aligned} i = 1 \quad & f_{i-1} + 6(-\alpha)f_1 - 4f_2 + f_3 = 0 \\ i = 2 \quad & -4f_{i-1} + (6 - \alpha)f_{i+2} - 4f_{i+3} + f_{i+4} = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Redzam, ka sastādot sistēmu (1.46) jāņem vērā vienu vai divus aiz sijas kontūra esošus punktus (zīm.1.15), t.i., fiktīvos punktus.

Nezināmo pārvietojumu noteikšanai jāizmanto arī robežnosacījumi $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(l) = 0$, $y'''(l) = 0$

Pirmais robežnosacījums apmierinās. Pārējie izmantojot izteiksmes (1.21), (1.22), un (1.23) dod šādas izteiksmes:

$$-f_{i-1} + f_{i+1} = 0; \quad f_{i+1} - 2f_{i+2} + f_{i+3} = 0; \quad 2f_{i+1} - 2f_{i+3} + f_{i+4} = 0 \quad (1.47)$$

Esam ieguvuši piecu algebrisku vienādojumu (1.46) un (1.47) sistēmu ar nezināmām ordinātām $f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}, f_{i+4}$. Sistēma viendabīga. Pašsvārstību frekvences ω noteikšanas nosacījums $D = 0$ noved pie vienādojuma:

$$\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 0.$$

Vienādojuma saknes; $\alpha_1 = 0,53590$, $\alpha_2 = 7,4641$.

Šīs saknes atbilst pirmajai un otrajai pašsvārstību frekvencēi. Saskaņā ar $\vartheta = n\sqrt{\alpha}$ atrodam parametrus $\vartheta_1 = 1,7112$ un $\vartheta_2 = 3,3058$, kur n – skaitlis, kas rāda cik daļas sija sadalīta.

Zinot parametru ϑ vērtības, atrodam pašsvārstību frekvences

$$\omega_1 = \frac{\vartheta_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{un} \quad \omega_2 = \frac{\vartheta_2^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

ω_1 noteikšanā kļūda 8,7 %, ω_2 – 29,6 %.

Dalot siju trīs daļas iegūstam precīzākus rezultātus [6].

Noturības uzdevumu risināšanas metodika izmantojot GDM iztirzāta mācību grāmatā [2].

2.nodaļa. BŪVKONSTRUKCIJU APRĒĶINU ENERĢĒTISKĀS METODES

§2.1. Pamatjēdzieni un principi

Deformējamās sistēmas (būvkonstrukcijas) līdzsvars vai kustība var tikt aprakstītas un izpētītas kā ar atbilstošo diferenciālvienādojumu sistēmu palīdzību (piem., elastības teorijas līdzvara, ģeometriskie un fizikālie vienādojumi, kas satur 15 nezināmos), tā arī izmantojot enerģētiskos principus, kuros ietilpst tādi jēdzieni, kā virtuālais darbs, deformācijas enerģija, potenciāla enerģija, papildus enerģija [1...18] u.c. Piemēram, konservatīvas sistēmas līdzvara gadījumā potenciālā enerģija ir minimāla. Tādā veidā diferenciālvienādojumu sistēmas risināšanas vietā konstrukcijas līdzvara problēmu var risināt meklējot funkciju, kas nodrošina kāda funkcionāla (piem., potenciālās enerģijas) minimumu. Šī minimuma noteikšanai izmanto t.s. tiešās variāciju metodes. Variāciju metodes ļauj iegūt aptuvenus risinājumus uzdevumiem, kurus precīzi atrisināt nav iespējams. Turpmāk apskatīsim tikai lineāri - elastīgus materiālus.

§2.2. Deformējama ķermeņa enerģijas funkcionāls

Inženierpraksē sastopami ne tikai uzdevumi, kuros jāatrod kādas funkcijas $y = f(x)$ ekstrēms, bet arī tādi, kuros jāatrod tāda mainīgā Π ekstrēms, kas atkarīgs no vienas vai vairākām funkcijām $y_i(x)$. Tādus mainīgos Π , kas atkarīgi no funkcijas izvēles, sauc par funkcionāliem.

Piemēram, sijas lieces potenciālās enerģijas $U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$ vērtība ir atkarīga no izlieces funkcijas veida $w = w(x)$, tāpēc U ir funkcionāls.

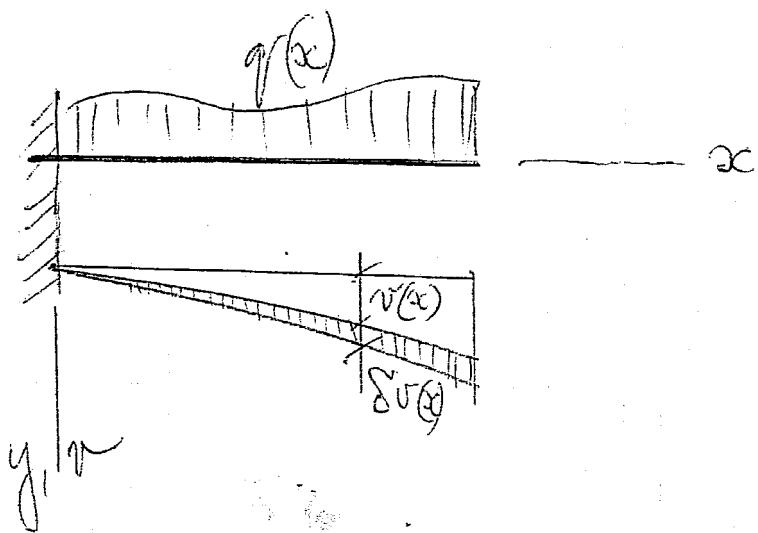
Matemātikas nozarē - variāciju rēķinos - izzina nosacījumus, pie kuriem funkcionāls iegūst ekstremālās vērtības, t.i. pie bezgalīgi mazām funkciju -argumentu izmaiņām neizmaina funkcionāla vērtību.

Pilnā elastīga deformējama ķermeņa enerģija sastāv no ķermeņa deformācijas potenciālās enerģijas U - uzkrātās iekšējās enerģijas un ārspēka enerģijas - A :

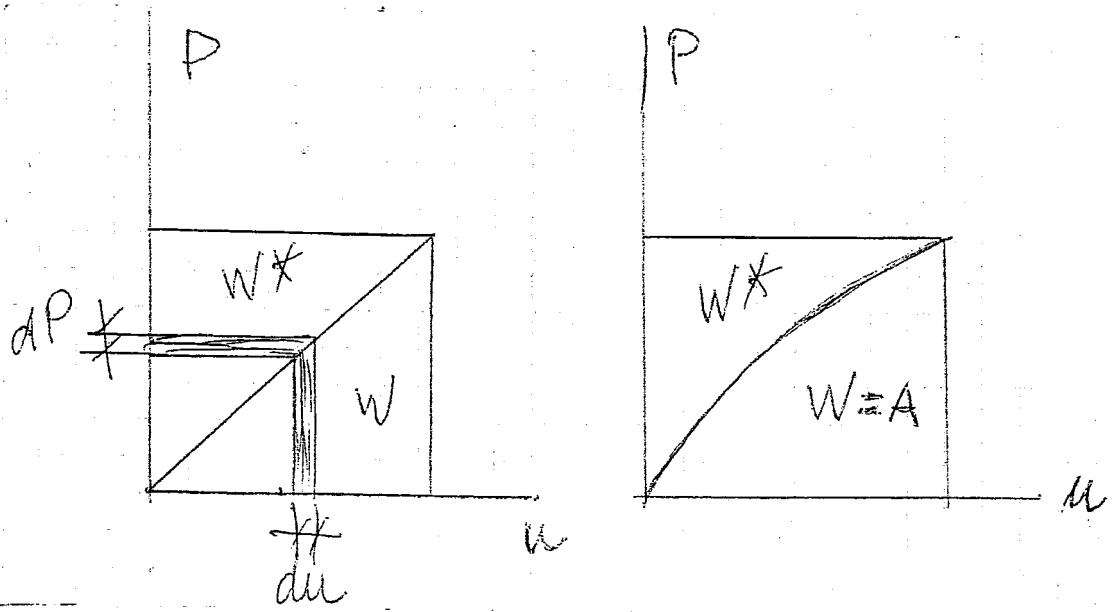
$$\Pi = U + A \quad (2.1)$$

Apskatīsim piemēru funkcionāla sastādīšanai. Sastādīsim pilno sijas enerģijas izteiksmi (zīm.2.1). Iekšējā enerģija U_0 tilpuma vienībā būs $U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2$. Izmantojot plakanā šķēluma hipotēzi $\varepsilon_x = -w'' z$

un $U_0 = \frac{1}{2} E(w'')^2 z^2$, kur z – attālums no neitrālās ass līdz šķiedrai.



Zim.2.1



Zim.2.2

Integrējot pa sijas tilpumu

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} E(w'')^2 z^2 dx dy dz = \int_0^l EI_x (w'')^2 dx$$

Slodzes potenciālu atrod šādi:

$$A = - \int_0^l q w dx$$

Pilnās enerģijas potenciāls

$$\Pi = U + A = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (w'')^2 dx - \int_0^l q w dx \quad [1]$$

Salīdzinot funkcionāli ar funkciju, pirmais ir atkarīgs no funkcijas $w(x)$ veida, otrs no argumenta x . Mainot funkcijas veidu $w(x)$, t.i., to variējot $\delta w(x) \approx w(x) - w_0(x)$, kur simbolu δ sauc par variāciju, izmainās funkcionāla skaitliskā vērtība. Izlieces funkcijas variācija jeb virtuālais pārvietojums parādīts zīm.2.1. funkcijas variācija ir funkcijas veida izmaiņa un līdz ar to izmainās arī funkcionāla vērtība, kura lineārās daļas pieaugums jeb variācija ir $\delta \Pi$.

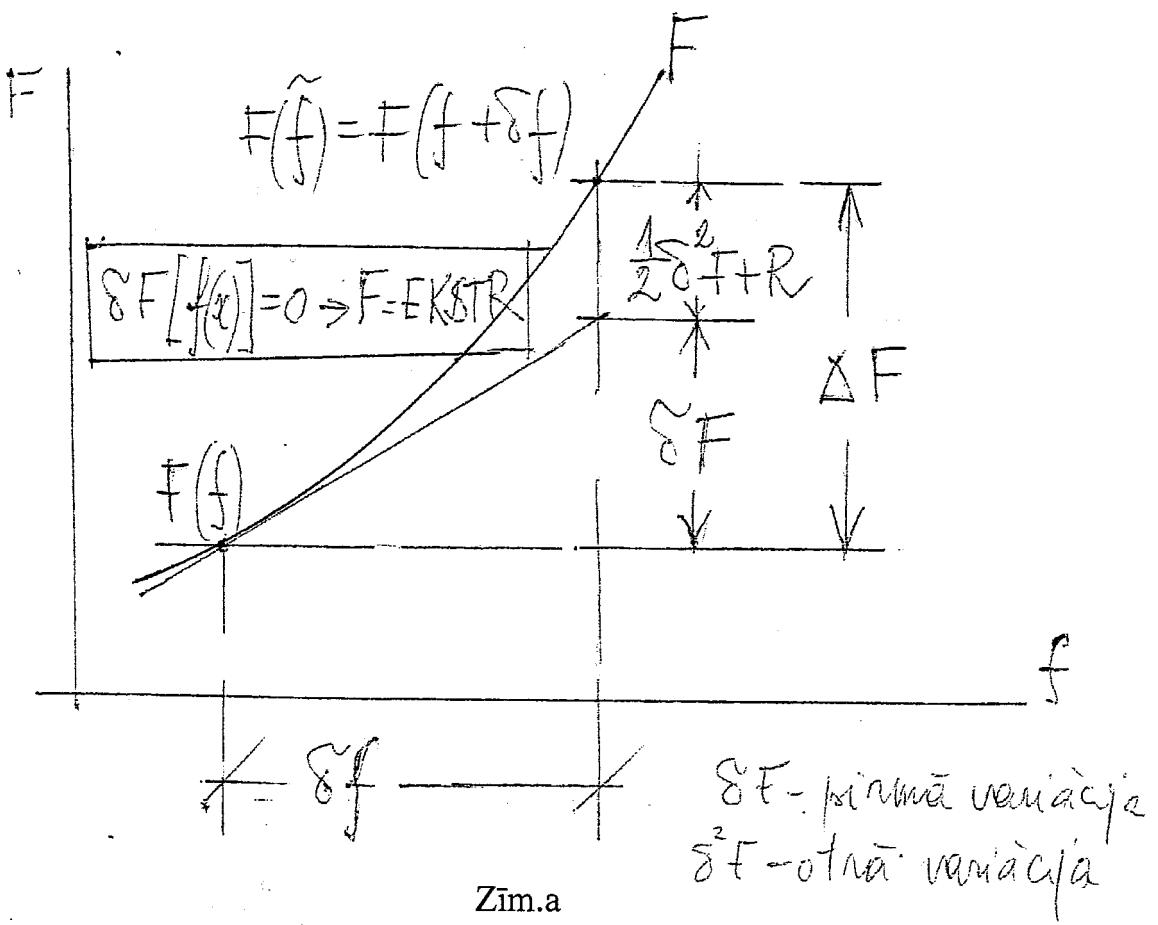
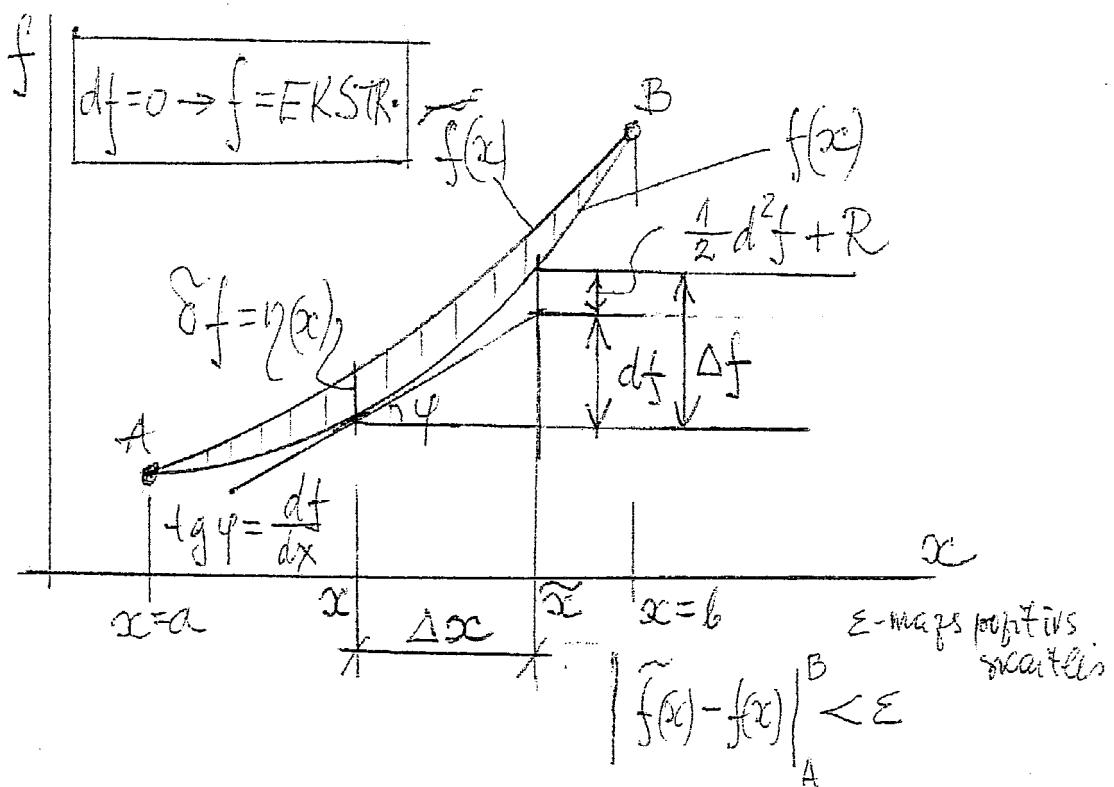
Funkcijas ekstrēma atrašanai mēs meklējam tādu argumenta x vērtību, pie kuras funkcija $w(x)$ iegūst maksimumu vai minimumu (ekstrēmu).

Variāciju uzdevumos jāatrod tāda funkcija $w(x)$, pie kuras funkcionāls $\Pi(w(x))$ iegūst ekstrēmu vērtību.

Funkcionāla ekstrēmās vērtības atrašana daudzējādā ziņā analoga funkcijas ekstrēma atrašanai. Tāpat kā diferenciālrēķinos pieaugot funkcijas argumentam par $\Delta x \approx dx$ funkcijas diferenciāls dw ir funkcijas pieauguma lineārā daļa, arī variāciju rēķinos funkcionāla variācija $\delta \Pi$. Ir funkcionāla pieauguma lineārā daļa attiecībā pret funkcijas variāciju dw (zīm.a).

Ja funkcija $w(x)$ sasniedz ekstrēmu (piem. sijas izliece), tad tās diferencialis $dw = 0$. Analogi variāciju uzdevumos mēs dodam pieaugumu vai variāciju $\delta w(x) \approx w(x) - w_0(x)$ meklējamai funkcijai $w(x)$. Ja funkcionāls sasniedz ekstrēmumu pie funkcijas $w(x) = w_0(x)$, tad tā variācija (pieauguma lineārā daļa) līdzinās nullei $\delta \Pi = 0$.

Mūsu uzdevumā funkcijas variācija $\delta w(x)$ ir virtuālais pārvietojums, t.i., bezgalmazs iedomāts pārvietojums. Virtuālo pārvietojumu, atšķirībā no patiesā maza pārvietojuma dw , apzīmē ar δw , tā darbībām pieņemtas tās pašas kārtulas, kas pieņemtas operatoram diferenciālam d.



§2.3. Lagranža pilnās potenciālās enerģijas stacionaritātes princips

Lagranža princips seko no virtuālo pārvietojumu principa: ja deformējams ķermenis atrodas līdzsvarā, tad ārējo spēku virtuālais darbs vienāds ar iekšējo spēku-spriegumu-virtuālo darbu visos kinemātiski pieļaujamos pārvietojumos un deformācijās.

$$\delta W^{(a)} = \delta W^{(i)} \quad \text{jeb} \quad \delta W = \delta W^{(i)} - \delta W^{(a)} = 0 \quad (2.2)$$

kur $\delta W^{(a)} = \int_{A_a} p_i \delta u_i dA + \int_V f_i \delta u_i dV$

$$\delta W^{(i)} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

kur tālāk p_i – virsmas spēki (spriegumi uz virsmas; f_i – tilpuma spēki

Virtuālais pārvietojums δu_i un deformācija $\tau \varepsilon_{ij}$ ir iedomāts pārvietojums, kas tiek patvaļīgi pieņemts, bet tam jābūt fiziski iespējamam, konstrukcijas formas izmaiņai jābūt saskaņotai ar balstiem, to veidu un jāievēro konstrukcijas nepārtrauktība. Darbu, ko veic faktiskie spēki un spriegumi uz virtuāliem pārvietojumiem un atbilstošām deformācijām sauc par virtuālo darbu: $\delta W^{(a)}$ – ārējo spēku virtuālais darbs, $\delta W^{(i)}$ – iekšējo spēku (spriegumu) virtuālais darbs.

Pilnā sistēmas potenciālā energija

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} \quad (2.3)$$

kur $\Pi^{(i)} = \int_V \bar{U} dV$, $\bar{U}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ – ir ķermenī iekšējā uzkrātā pilnā atgriezeniskā (elastīgā) deformācijas energija.

$$\Pi^{(a)} = - \int_{A_a} p_i u_i dA - \int_V f_i u_i dV - \text{ārējo spēka potenciālā energija (potenciāls).}$$

Atzīmēsim, ka šeit ievestā izteiksme neatbilst ārējo spēku darbam pārejā no nenoslogotā stāvokļa beigu stāvoklī [11].

Saskaņā ar (2.2) iegūstam

$$\delta_\varepsilon \Pi = 0 \quad \text{jeb} \quad \Pi = Extr.$$

δ_ε nozīmē, ka variē pārvietojumus un atbilstošās deformācijas, bet spēkus un spriegumus nevariē. Pilnās potenciālās enerģijas stacionaritātes principu formulē šādi: starp visiem pieļaujamiem pārvietojumiem, kas apmierina dotos robežnosacījumus, patiesie ir tie, kuriem atbilst pilnās potenciālās enerģijas stacionārā vērtība un kuri līdz ar to apmierina līdzsvara nosacījumus (ir līdzsvarā).

Saskaņā ar Ležena-Dirihlē teorēmu pie nosacījuma $\delta_\varepsilon \Pi = 0$ – līdzsvars stabils, ja $\delta_\varepsilon^2 \Pi > 0$,

ja $\delta_\varepsilon^2 \Pi < 0$ – līdzsvars nestabils

ja $\delta_\varepsilon^2 \Pi = 0$ – līdzsvars indiferents.

Lagranža princips ekvivalent līdzsvara vienādojumiem ķermenī un uz tā robežvirsmām. Izvēloties pārvietojumu vai deformāciju funkcijas

jāievēro deformāciju nepārtrauktības nosacījumu ķermenī un geometriskie robežnosacījumi uz ķermeņa virsmas.

§2.4. Kastiljano papildus enerģijas stacionaritātes princips

Tā vietā, lai no līdzsvara stāvokļa variētu pārvietojumus, var variēt spriegumus. Tilpuma spēki katrā ķermeņa punktā fiksēti, tāpēc to variācija līdzinās nullei. Virsmas spēki p_q virsmas daļā S_q fiksēti un arī nav variējami, bet ķermeņa virsmas daļā S_u doti pārvietojumi u_i un šeit reaktīvā virsmas slodze p_u nav zināma un to var variēt δp_u (zīm.2.3.a un 2.3.b).

Apskatam divus ķermeņa spriegumstāvokļus:

1. patieso spriegumstāvokli σ_{ij} , ko izraisa laukuma daļā S_q dotā slodze p_q un pārvietojumi u_i . Spriegumstāvoklis apmierina līdzsvara nosacījumus, tamdēļ tas statistiski iespējams.
2. visus iespējamos variētos virtuālos spriegumstāvokļus $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$, kas apmierina līdzsvara nosacījumus visos ķermeņa punktos un robežnosacījumus ķermeņa virsmas S_q daļā un uz S_u , kur $p_u + \delta p_u$.

Abi spriegumstāvokļi ir statistiski iespējami. Šo spriegumstāvokļu starpība veido līdzsvarotu spēku sistēmu, sastāvošu no variācijām $\delta\sigma_{ij}$ un δp_u , kas ir līdzsvarā un tāpēc statistiski iespējama.

Saskaņā ar Lagranža virtuālo pārvietojumu principu, šo spēku variāciju darbs uz jebkuru ķermeņa virtuālo pārvietojumu līdzinās nullei.

Par virtuāliem pārvietojumiem pieņemam patiesos pārvietojumus u_i un deformācijas ε_{ij} . Rezultātā dabūsim spēku $\delta\sigma_{ij}$ un δp_u darbu uz patiesiem pārvietojumiem

$$\delta_\sigma A = - \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV + \int_{S_u} u_i \delta p_u dS_u = 0 \quad \text{jeb} \quad \delta_\sigma \Pi^* = \delta(U^* - A^*) = 0, \quad \text{kas ir}$$

deformāciju nepārtrauktības nosacījums [8, 10, 11], kur

$$\delta_\sigma U^* = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV - \text{papildus deformāciju enerģijas variācija}$$

$$\delta_\sigma A^* = \int_{S_u} u_i \delta p_u dS_u - \text{spēku } p_u \text{ potenciāla variācija uz laukuma } S_u,$$

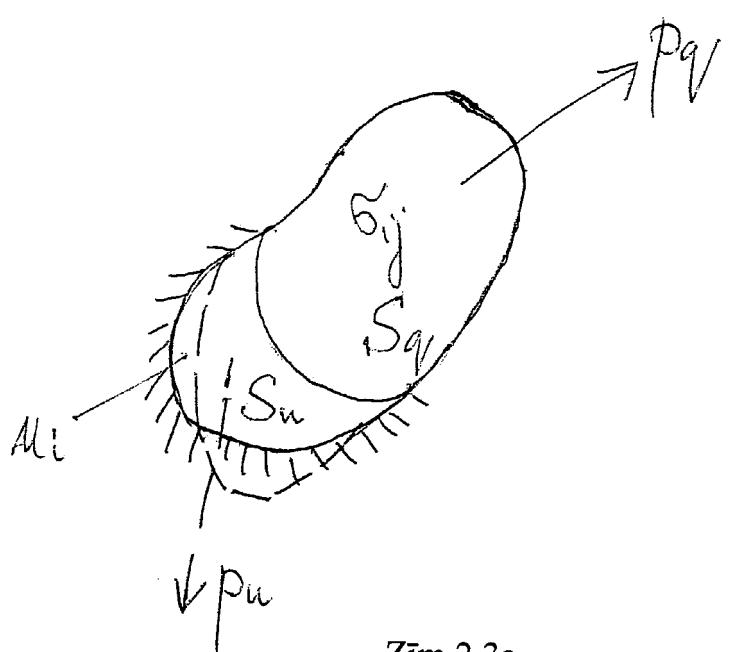
(ārspēku papildus darbs).

$\delta_\sigma \Pi^*$ papildus enerģijas variācija.

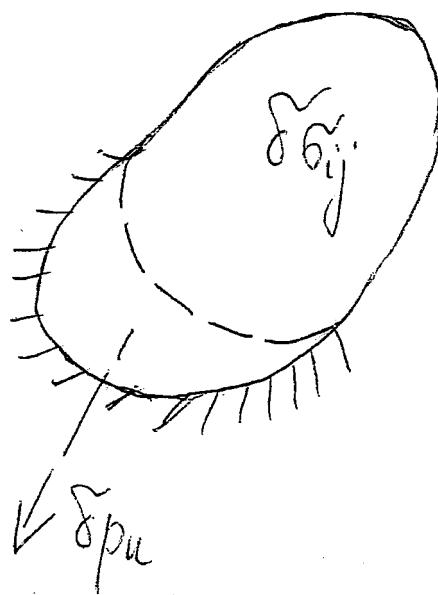
Beidzamais vienādojums izsaka Kastiljano principu: patiesie spriegumi σ_{ij} , kas apmierina arī deformāciju nepārtrauktības nosacījumus, piešķir papildus enerģijai stacionāru vērtību:

$$\delta_\sigma \Pi^* = 0 \rightarrow \Pi^* = EKSTR.$$

Kastiljano princips no visiem statistiski iespējamiem sprieguma stāvokļiem (kas apmierina līdzsvara nosacījumus), izvēlās tādu, kas



Zim.2.3a



Zim.2.3b

nodrošina ne tikai līdzsvaru, bet arī deformāciju nepārtrauktību [8, 10, 11] un tādā veidā mēs nonākam pie atrisinājuma unitātes.

Kastiljano princips seko no virtuālo spriegumstāvokļu izmaiņas principa. Ja ārējo spēku virtuālais pilnais papildus darbs vienāds ar deformāciju iekšējo papildus virtuālo darbu visām statiski pieļaujamām spēku un spriegumu sistēmām, tad deformējamā ķermeņa pārvietojumi un deformācijas apmierina nepārtrauktības nosacījumus un robežnosacījumus, t.i.:

$$\delta W^* = \delta W^{*(a)} - \delta W^{(i)} = 0 \quad \text{vai} \quad \delta W^{*(a)} = \delta W^{(i)} \quad (2.4)$$

kur

$$\delta W^{*(a)} = \int_{A_u} u_i \delta p_i dA + \int_V u_i \delta f_i dV; \quad \delta W^{(i)} = \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV$$

$\delta p_i; \delta f_i; \delta \sigma_{ij}$ - virsmas, tilpuma spēku un spriegumu variācijas.

Papildus enerģijas stacionaritātes princips tiek formulēts šādi

$$\delta_\sigma \Pi^* = 0 \quad \text{vai} \quad \Pi^* = EKSTR. \quad (2.5)$$

δ_σ - norāda uz to, ka variē tikai spriegumus un spēkus.

$$\Pi^* = \Pi^{*(i)} + \Pi^{*(a)}$$

kur $\Pi^{*(i)} = \int_V \bar{U}^* dV$ - papildus iekšējās enerģijas potenciāls, kur

$$\bar{U}^*(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

$\Pi^{*(a)} = - \int_{A_u} u_i p_i dA - \int_V u_i f_i dV$ - papildus ārējo spēku enerģijas potenciāls.

Bieži $\Pi^{*(a)}$ izteiksmes otro locekli var neievērot, jo parasti f_i ir nemainīgs lielums.

Papildus enerģijas stacionaritātes principu var formulēt šādi: no visiem statiski pieļaujamiem spēkiem un spriegumiem, kas apmierina līdzsvara vienādojumus, īstie spēki un spriegumi, kas apmierina arī patieso deformēto stāvokli, piešķir summārai papildus potenciālai enerģijai stacionāru vērtību.

Stabila līdzsvara gadījumā Π^* vērtība ir minimāla.

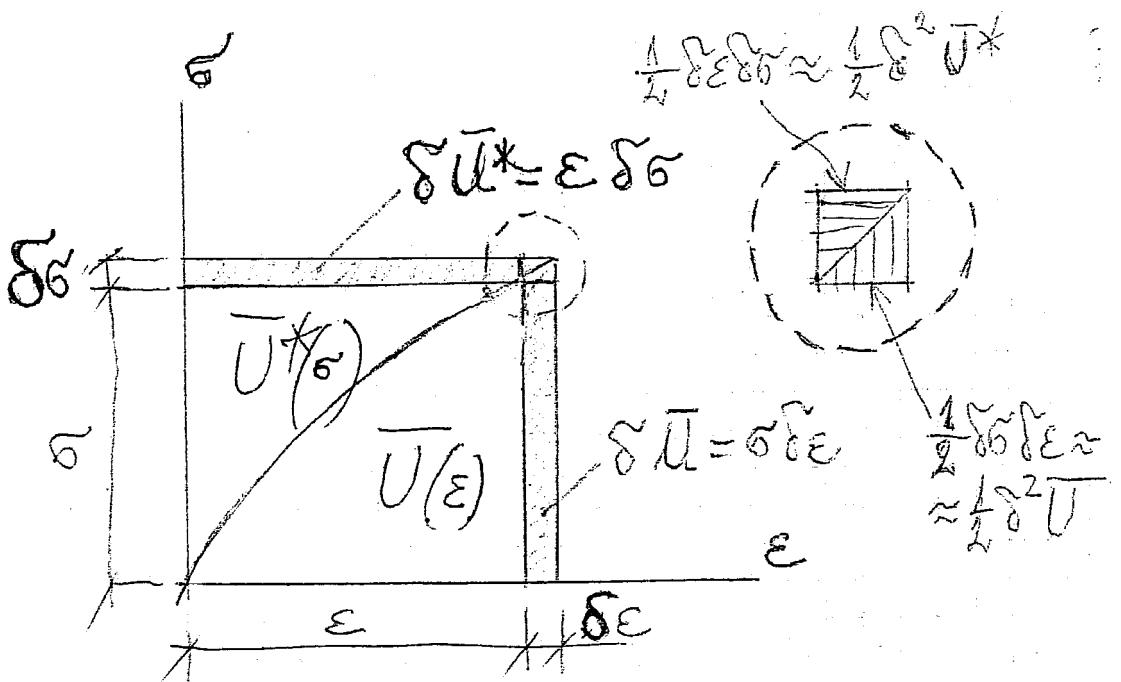
Īsāk to var formulēt šādi:

No visiem spriegumu stāvokļiem, kas apmierina līdzsvara vienādojumus, pietiekams ir tas, kam papildus potenciāla enerģija ir minimāla.

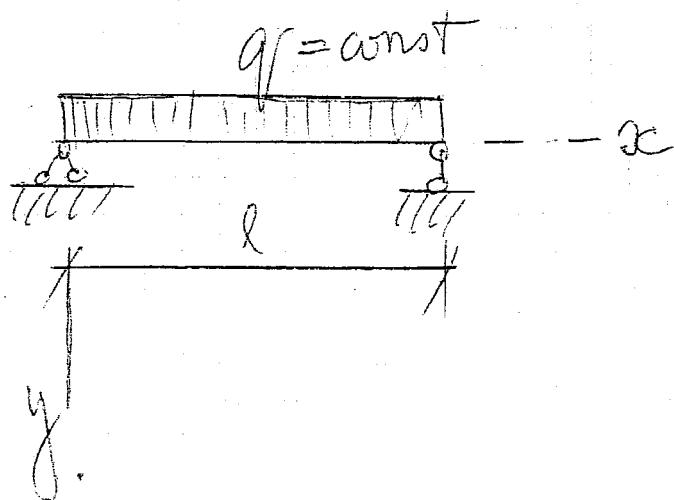
Terminu "papildus darbs" viegli izprast, ja aplūkojam 2.2.zīmējumu. Nelineāras sakarības gadījumā starp P un u

$$W = \int P du, \quad W^* = \int u dP$$

Tātad $W^* - Pu - W$ ir laukums, kas laukumu W papildina līdz taisnstūrim.



Zīm.2.3 Īpatnējā deformācijas potenciālā energija un papildus deformācijas energija $\bar{U}(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon$, $\bar{U}^*(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma$, $\bar{U}(\epsilon) + \bar{U}^*(\sigma) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$



Zīm.2.4

Risinot uzdevumu izmantojot Kastiljano principu, jāievēro, ka izvēlētai spriegumu un to variāciju $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\sigma_{xy}$ funkcijām jāievēro līdzsvara nosacījumi ķermenī un statiskie robežnosacījumi uz virsmas.

Atzīmēsim, ka lineāri elastīgiem materiāliem, kas seko Huka likumam, spriegumu elastīgais potenciāls $\bar{U}(\varepsilon)$ un papildus īpatnējā deformācijas enerģija (deformācijas potenciāls) $\bar{U}^*(\sigma)$ ir vienādi un ir spēkā Klapeirona formula:

$$\bar{U} = \bar{U}^* = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij};$$

kā arī izpildās sakarība, kas ir patiesa arī nelineāri elastīgiem materiāliem (zīm.2.3)

$$\bar{U}(\varepsilon) + \bar{U}^*(\sigma) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Zīmējumā 2.3 redzam, ka $\bar{U}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$ un attiecīgi $\bar{U}^*(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma$,

šie lielumi summā dod taisnstūri ar laukumu $\sigma \cdot \varepsilon$.

Speciālā elastīgi-lineāra materiāla gadījumā, kad ārējie spēki p_i uz ķermeņa virsmas ir nemainīgi un to variācija $\delta p_i = 0$ un ja arī tilpuma spēku variācija $\delta f_i = 0$, kā arī ja nav uzdoti ķermeņa pārvietojumi, tad ārspēka papildus potenciālās enerģijas pieaugums (variācija) ir nulle $\delta M^{*(a)} = 0$. Šajā gadījumā tiek variēti tikai spriegumi (vai iekšējās piepūles) un no iepriekšējā seko deformācijas papildus enerģijas minimuma nosacījums:

$$\delta\Pi^* = \delta\Pi^{*(i)} = \delta U^* = 0,$$

kur U^* - deformācijas papildus enerģija.

Lineāri elastīga ķermeņa gadījumā

$$\delta U^* = \delta U = 0, \quad (2.6)$$

kur U - deformācijas enerģija.

Vienlīdzība (2.6) nosaka, ka patieso spriegumu (iekšējo piepūļu) gadījumā elastīgi-lineāras sistēmas deformācijas potenciālā enerģija ir stacionāra-stabila līdzsvara gadījumā - minimāla.

Iekšējo spēku enerģija U skaitliski ir vienāda ar ārējo spēku darbu, kas nepieciešams ķermeņa deformēšanai. Šī iemesla dēļ nosacījumu (2.6) sauc par minimālā darba principu.

Aprēķinot statiski nenoteicamo sistēmu, liekos nezināmos X_1, X_2, \dots, X_n jāievēro, ka saskaņā ar papildus enerģijas minimuma principu, ja pārvietojumi lieko nezināmo virzienos līdzinās nullei, tad stabilā līdzsvarā esošai konstrukcijai liekiem nezināmiem ir tādas vērtības, pie kurām papildus enerģija ir minimāla, papildus enerģiju izsaka kā lieko nezināmo funkciju un tie kļūst par variējamiem lielumiem.

Piemēram: vienreiz (1x) statiski nenoteicamas elastīgas sijas deformācijas enerģija (ievērojot tikai lieces momentus) būs

$$U^* = U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EI},$$

kur $M = M_p + \bar{M}_1 X_1$

X_1 – liekais nezināmais.

Šajā izteiksmē vienīgais variējamais lielums ir X_1 .

Kā piemēru spriegumu variāciju principa pielietojumam apskatam stiepti – spiestu stieni (zīm.a) Stiensis slogots ar izkliedētu slodzi $p(x)$ un doti tā galu pastiprinājumu pārvietojumi $u(0)$ un $u(l)$. Ass spēks šķēlumā x aprēķināms izmantojot līdzsvara nosacījumu:

$$N(x) = N(0) - \int_0^x pdx$$

Reakciju N_0 un N_l aprēķinam mums ir viens vienādojums

$$R_p + N_0 + N_l = 0,$$

kur $R_p = - \int_0^l pdx$

Redzam, ka uzdevums ir statiski nenoteicams un pastāv bezgalīgi daudz iekšējo piepūļu funkcijas $N(x)$ un reakciju vērtības N_0 un N_l , kas apmierina līdzsvara vienādojumus. Katrā funkcija un reakcijas no šīs kopas ir statiski iespējama.

Viennozīmīgu atrisinājumu dod Kastiljano spriegumu variācijas princips, kas nodrošina arī deformāciju nepārtrauktības nosacījumus. To var pierādīt (skat. speciālo literatūru).

Pieņemsim, ka patiesās piepūļu $N(x)$ un spriegumu $\sigma(x)$ funkcijas pieaugašas par bezgala mazām virtuālām to variācijām $\delta N(x)$ un $\delta\sigma(x)$. Summārie lielumi $N + \delta N$ un $\sigma + \delta\sigma$ arī ir statiski iespējami. Par cik visa ārējā slodze $p(x)$ tiek līdzsvarota ar reakcijām N_0 un N_l un spriegumiem σ , papildus virtuāliem spēkiem δN un $\delta\sigma$ jābūt pašlīdzsvarotiem, jo $\delta p = 0$.

Par cik ārējo virsmas spēku δN_0 un δN_l , un iekšējo spēku $1 \cdot \delta\sigma$ ir līdzsvarā, tad saskaņā ar virtuālo pārvietojumu principu to darbs δA uz jebkuru virtuālo pārvietojumu būs nulle:

$$\delta_\sigma A = 0$$

Simbolu δ sauc par variāciju, tā darbības tādas pašas kā operatora - diferenciāla – d..

Par deformējamas sistēmas virtuāliem pārvietojumiem un deformācijām var pieņemt jebkurus mazus pārvietojumus un tiem proporcionālas deformācijas, kas nodrošina ķermeņa nepārtrauktību un pastāvīgu saskarsmi ar balstu nostiprinājumiem. Ja ķermeņa deformācijas nodrošina pārvietojumu $u(x)$ nepārtrauktību un tiem proporcionālo deformāciju $\epsilon(x)$ savietojamību, tad šīs funkcijas var pieņemt par virtuālām un ir jāizpildās nosacījumam $\delta_\sigma A = 0$.

Sastādīsim deformāciju nepārtrauktības nosacījumu – līdzsvarotas spēku sistēmas $1 \cdot \delta\sigma$ un $\delta N_0, \delta N_l$ darba uz deformācijām $1 \cdot \varepsilon$ un pārvietojumiem $u(0), u(l)$ izteiksmi, kurai jālīdzinās nullei, saskaņā ar virtuālo pārvietojumu principu.

$$\delta_\sigma A = - \iiint_V \varepsilon \cdot 1 \delta\sigma dV + u(0) \cdot \delta N_0 + u(l) \delta N_l = 0$$

Zem integrāla zīmes ir īpatnējā papildus darba pieaugums $\varepsilon \delta\sigma = \delta \bar{U}^*$ (zīm.2.3).

Īsi iegūto sakarību pierakstam šādi:

$$\delta_\sigma (U^* + \tilde{\Pi}) = 0 \quad (a)$$

kur

$$U^* = \iiint_V \bar{U}^* dV - \text{iekšējo spēku papildus darbs}$$

$\tilde{\Pi} = N_0 \cdot u(0) + N_l \cdot u(l)$ - virsmas spēku potenciāls, ja ir uzspiestie pārvietojumi.

Sakarība (a) ir spriegumu variācijas principa izteiksme. Saskaņā ar to no visiem statistiski iespējamiem, patiesie būs tie spriegumi un piepūles, kuriem atbilst funkcionāla $U^* + \tilde{\Pi}$ stacionāra vērtība. Sakarībā (a) variē iekšējos spēkus, tamdēļ funkcionāls $U^* + \tilde{\Pi}$ jāizsaka ar iekšējām piepūlēm.

Var parādīt, ka ja izpildās nosacījums $\delta_\sigma (U^* + \tilde{\Pi}) = \delta_\sigma \Pi^* = 0$, tad tiek apmierināti arī Sen-Venāna deformāciju nepārtrauktības vienādojumi.

Kopā ar līdzvara vienādojumiem ķermeņa tilpumā un uz tā virsmas, kā arī fizikālām $\sigma \sim \varepsilon$ sakarībām izteiksme (a) veido spēku metodes vienādojumu pilnu sistēmu.

Lineāri - elastīga materiāla gadījumā $\bar{U}^* = \bar{U}$. Ja arī nav uzspiesto pārvietojumu, tad $\tilde{\Pi}^* = 0$ un sakarība (a) būs

$$\delta_\sigma U = 0$$

To nosauksim par minimāla darba nosacījumu, saskaņā ar kuru no visām statistiski iespējamām iekšējām piepūlēm patiesās būs tās, kurām ķermeņa deformācijas enerģija vai tai skaitliski vienlīdzīgais iekšējo spēku darbs ir minimāls; šis nosacījums nodrošina ķermeņa deformāciju nepārtrauktību jeb savietojamību.

Konkretizējam piemēru, pieņemam $EF = \text{const}$ un $p = \text{const}$, $u(0) = u(l) = 0$ (zīm.b.). Apzīmējot $N(0) = X_1$, līdzvara vienādojums būs

$$N(x) = X_1 - px$$

Deformācijas enerģijas šāda

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(x) dx}{EF} = \frac{1}{2EF} \int_0^l (X_1 - px)^2 dx = \frac{1}{2EF} \left(lX_1^2 - pl^2 X_1 + \frac{pl^3}{3} \right)$$

Deformācijas enerģijas variācija ir

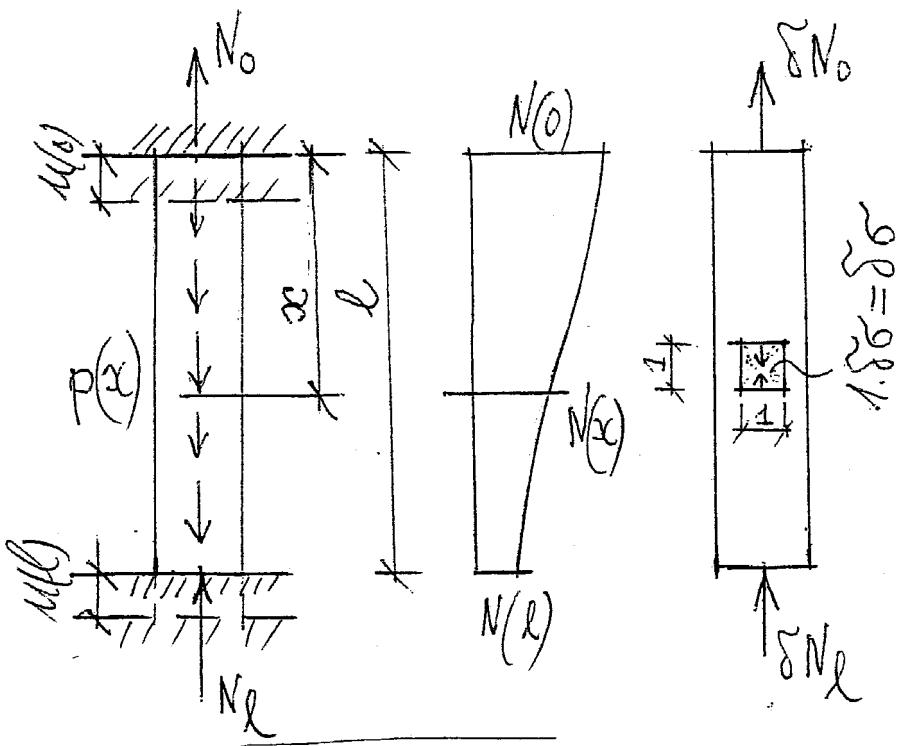
$$\delta_\sigma U = \frac{dU}{dX_1} \delta X_1 = 0 \quad \text{vai} \quad \frac{dU}{dX_1} = 0; \quad 2lX_1 - pl^2 = 0$$

no kurienes $X_1 = p \frac{l}{2}; \quad N(x) = p \frac{l}{2} - px.$

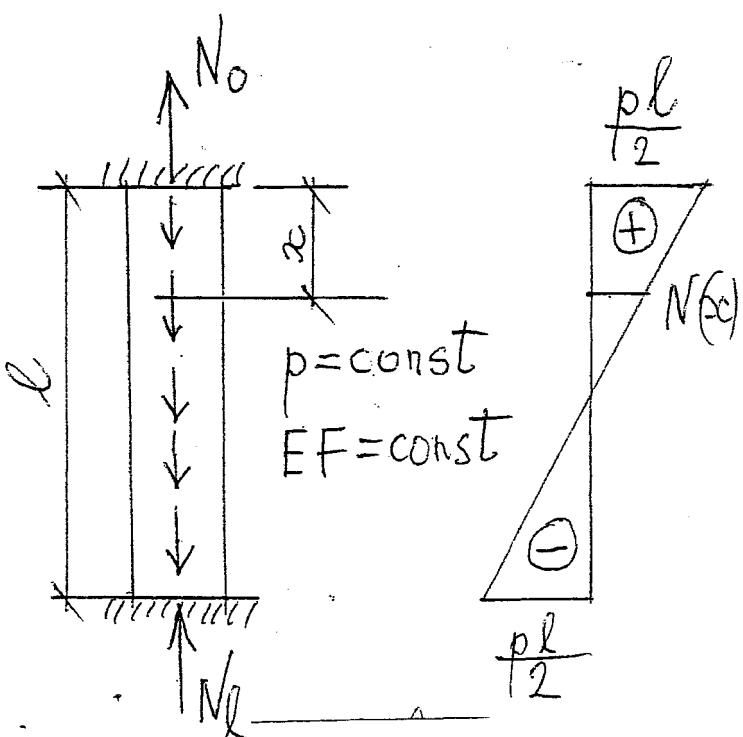
$N(x)$ epīra parādīta zīm. b

$$N_0 = p \frac{l}{2}; \quad N_l = p \frac{l}{2}$$

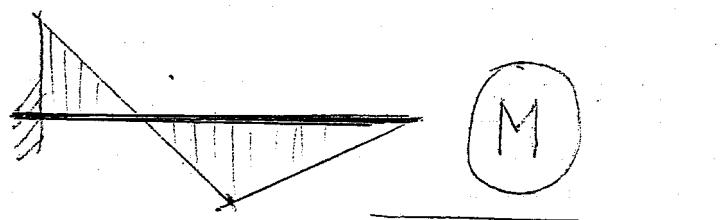
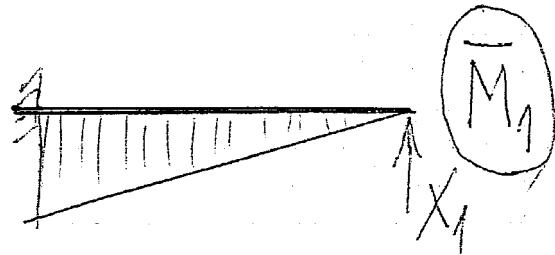
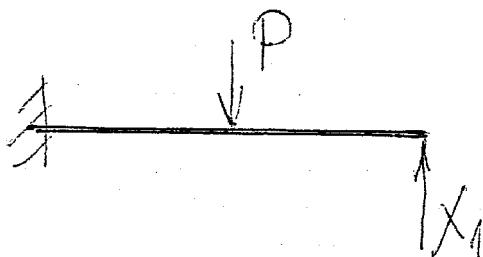
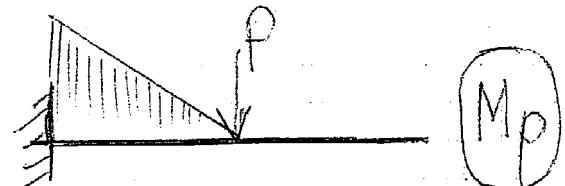
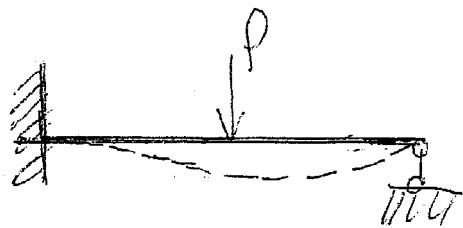
Stieņa deformēšanās nosacījumi izpildās $\Delta l = 0$.



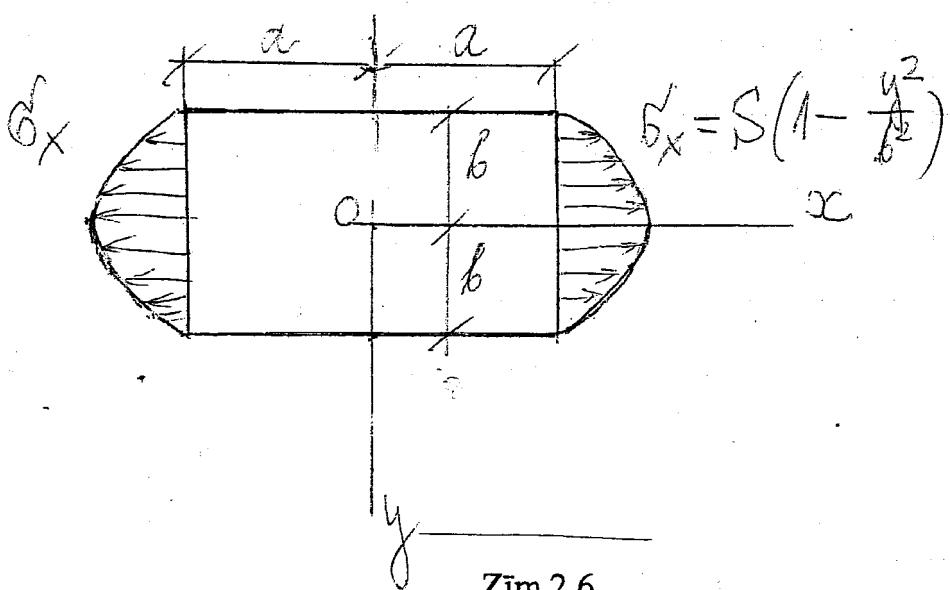
Zim.a



Zim.b



Zim.2.5



Zim.2.6

§2.5. Ritca metode

Metodes ideja - pāriet no kontinuālas sistēmas, uz diskrētu - ar galīgu kustības brīvības skaitu, t.i. funkcionālu $\Pi = \Pi(u, v, w)$ atvieto ar funkciju $\Pi = \Pi(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), kas atkarīga no galīga skaita argumentiem. Tagad funkcionāla t.s. ekstremāles atrašanās vietā jārisina standarta uzdevums par diskrēta argumentu skaita funkcijas ekstrēmu. Par ekstremāli sauc funkciju, kas funkcionālim piešķir ekstremālu vērtību, un to atrod pēc variāciju rēķinu metodikas, kas nav elementāra.

Vispārējā trīsdimensiju ķermeņa uzdevuma gadījumā pārvietojumus u, v, w aproksimējam summas veidā

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \begin{Bmatrix} fu_i(x, y, z) \\ fv_i(x, y, z) \\ fw_i(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

kur a_i - nosakāmie lielumi, kas raksturo sistēmas kustības brīvību skaitu; fu_i, \dots - bāzes funkcijas, kurām jāapmierina robežnosacījumi. Ievietojot (2.7) funkcionālī (2.3) lineāri deformējamai sistēmai iegūstam kvadrātisku funkciju (sauktu arī par kvadrātisku formu):

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \alpha_j \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_{ip} \alpha_i \quad (2.8)$$

No nosacījuma $\delta M = 0$ dabū

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial M^{(a)}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

no kurienes seko n lineāri algebriski vienādojumi pret vispārinātiem pārvietojumiem α_i (kustības brīvībām):

$$\left. \begin{aligned} r_{11}\alpha_1 + \dots + r_{1n}\alpha_n + R_{1p} &= 0 \\ \dots & \\ r_{n1}\alpha_1 + \dots + r_{nn}\alpha_n + R_{np} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Jeb matricu formā

$$R\vec{Z} + \vec{R}_p = 0$$

kur

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad - \text{stinguma matrica} \quad (2.11)$$

$\vec{Z} = [\alpha_1 \dots \alpha_n]^T$ - vispārināto pārvietojumu vektors

$\vec{R}_p = [R_{1p} \dots R_{np}]^T$ - vispārināto ārējo spēku vektors

Esam dabūjuši pārvietojumu metodes kanoniskos vienādojumus, pazīstamus no būvmehānikas kursa.

Piemērs 7. Dota brīvi balstīta sija ar konstantu šķērsgriezumu un vienmērīgu slodzi q (zīm.2.4): Izlieci pieņemam ar vienu kustības brīvību a :

$$v = a \sin(\pi x / l), \quad (2.12)$$

kas apmierina robežnosacījumus ja $x = 0, l$, tad $v = 0, \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$

Stieņa lieces potenciālā enerģija

$$\Pi^{(i)} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

Ievietojot (2.12) dabū

$$\Pi^{(i)} = \frac{EI}{2} \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4}$$

Ārspēku darbs (potenciāls):

$$\Pi^{(a)} = \int_0^l q v dx = qa \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = 2qa \frac{l}{n}$$

Pilnā potenciālā enerģija

$$\Pi = \frac{EI}{2} \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4} - 2qa \frac{l}{\pi}$$

No ekstrēma nosacījuma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2a \frac{EI}{2} \frac{l}{2} \frac{\pi^4}{l^4} - 2q \frac{l}{\pi} = 0$$

dabū maksimālo izlieci stieņa vidū a :

$$a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013073 \frac{ql^4}{EI}$$

Kļūda, salīdzinot ar precīzo rezultātu - 0,4%.

§2.6. Plātnes izlieces aprēķins ar Ritca metodi

Piemērs 8. Izmantojam pilnās potencialās enerģijas izteiksmi stingām plātnēm:

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}$$

Plātnes izmēri plāna a, b , biezums h , tā brīvi balstīta pa kontūru, un slogota ar vienmērīgu slodzi q .

Plātnes lieces potenciālo enerģiju aprēķina šādi:

$$\Pi^{(i)} = \iint_{0 0 -h/2}^{a b h/2} U_0 dx dy dz$$

kur $U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$ - īpatnēja potenciāla enerģija.

Izmantojot plakano šķēlumu hipotēzi:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

un Huka likumu

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1-\mu^2} (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z\end{aligned}$$

dabū

$$\Pi^{(i)} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (2.13)$$

kur $D = \frac{E}{12(1-\mu^2)}$ - cilindriskais stingums.

Ārēja spēka potenciālā enerģija

$$\Pi^{(a)} = \int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (2.14)$$

Pilnā plātnes potenciālā enerģija būs

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (2.15)$$

Izlieci w var aproksimēt ar divkāršu rindu, kas apmierina reobežnosacījumus:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.16)$$

Aprobežosimies ar vienu rindas locekli, metodikas noskaidrošanai:

$$W = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.17)$$

Ievietojot (2.17) izteiksmē (2.15) dabū

$$\Pi = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \pi^4 a_{11}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4ab}{\pi^2} q a_{11}$$

No ekstrēma nosacījuma $\frac{\partial \Pi}{\partial a_{11}} = 0$ seko

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{11}} = D \frac{ab}{4} \pi^4 a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4ab}{\pi^2} q = 0$$

no kurienes

$$a_{11} = \frac{16qa^4}{D\pi^6 (1-a^2/b^2)^2} \quad (2.18)$$

un no (2.17) seko izlieces izteiksme

$$W = \frac{16qa^4}{D\pi^6 (1-a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Programmā ietvertās Bubnova-Gaļorkina un arī Ritca metodes, kā arī uz Hamiltona principa dibinātās dinamisko skaitlisko aprēķinu metodes labi iztirzātas prof.E.Lavendeļa mācību grāmatā [1]. Kritisko spēku skaitliskās aprēķinu metodes dotas Būvmehānikas mācību grāmatā [2]. Tamdēļ šajā konspektā minētie jautājumi nav atkārtoti.

§2.7. Kastiljano principa pielietošana skaitliskos aprēķinos

Kastiljano princips integrālā formā izsaka un atvieto deformāciju nepārtrauktības nosacījumus. Tamdēļ risinot ar šo metodi nepieciešams, lai izvēlētās spriegumu funkcijas un to variācijas $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}$ apmierinātu līdzsvara nosacījumus ķermeņa iekšpusē un statiskos robežnosacījumus uz ķermeņa virsmas.

Apskatīsimpiemēru (piemērs 9).

Eksistē bezgalīgi daudz līdzsvarā esošas lieces momentu epīras statiski nenoteicamai sijai (zīm.2.5).

$$M = M_p + X_1 \bar{M}_1 \quad (2.19)$$

kur M_p un \bar{M}_1 - zīmējumā 2.5 parādītās epīras, bet X_1 patvaļīgi variējama balsta reakcija.

Aprēķināsim X_1 , izmantojot minimālā papildus darba principu. Deformācijas enerģija ievērojot tikai liecesmomentus būs:

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_p + X_1 \bar{M}_1)^2}{EI} ds$$

Deformācijas papildus enerģijas minimuma nosacījumi (ārēja slodze netiek variēta - tā ir konstanta).

$$\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial X_1} = \left(\int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} \right) X_1 + \left(\int_0^l \frac{M_p \bar{M}_1}{EI} ds \right) = 0 \quad (2.20)$$

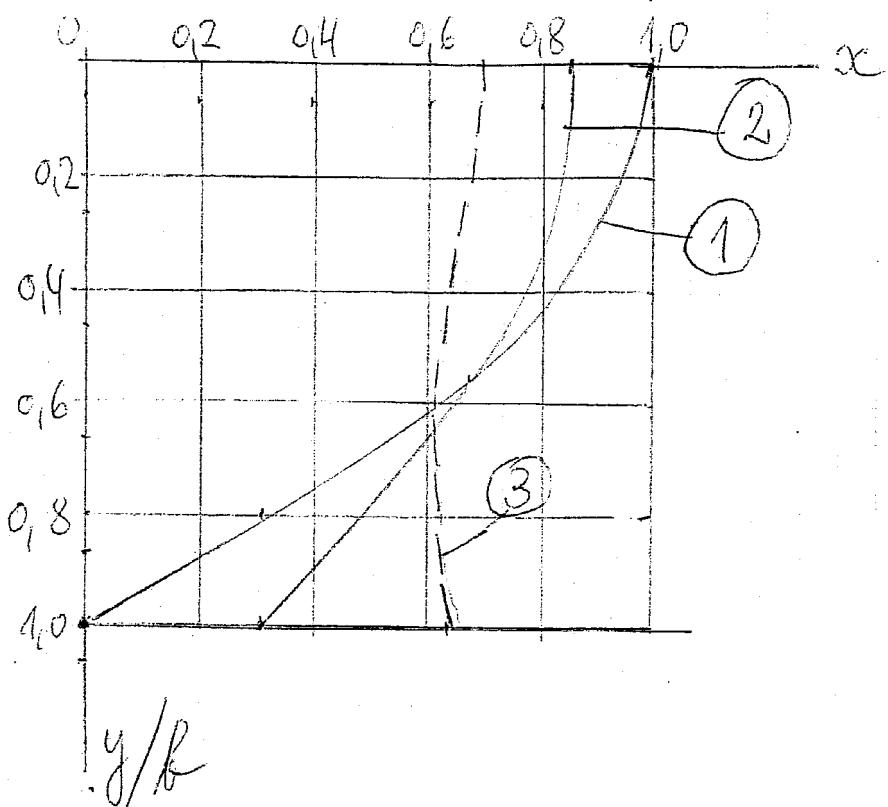
jeb

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\text{kur } \delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI}; \quad \Delta_{1p} = \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_1}{EI} ds$$

Iegūtais vienādojums ir labi pazīstamais spēku metodes kanoniskais vienādojums. Tas nosaka to, ka locīklas balsta pārvietojums ir nulle un ir deformāciju nepārtrauktības nosacījums dотai vienkāršai statiski nenoteicamai sistēmai.

\tilde{S}_X/S



Zim.2.7

§2.8. Kastiljano principa izmantošana taisnstūra plātnes spriegumu aprēķinā

Pēc analogijas ar Ritca metodi, sprieguma funkciju var izteikt rindas veidā ar nezināmiem skaitliskiem koeficientiem, kuri jānosaka risināšanas gaitā

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \dots \quad (2.21)$$

Rindai jāapmierina robežnosacījumi, bet $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ nezināmas konstantes, kas jānosaka.

Piemērs 10. Apskatīsim stieptu taisnstūra plātni, ja stiepes piepūles galos sadalās pēc parabolas likuma (zīm.2.6). Ārējie spēki šeit konstanti, tāpēc netiek variēti un (2.5) būs

$$\delta_\sigma \Pi^* = \delta_\sigma \Pi^{*(i)} = 0 \quad (2.22)$$

(skatīt arī 2.6).

Lineāri elastīgiem materiāliem deformācijas papildus enerģija vienāda ar deformācijas enerģiju $\Pi^{(i)} = \Pi^{*(i)}$.

Robežnosacījumi šādi:

ja $x = \pm a$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (2.23)$$

(skat.zīm.2.6 līkne 1)

ja $x = \pm b$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = 0$$

Vienības biezas plātnes deformācijas enerģija

$$\begin{aligned} \Pi^{*(i)} &= \Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ &= \frac{1}{2E} \iint (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2) dx dy \end{aligned} \quad (2.24)$$

Plakanā uzdevumā spriegumu sadalījums nav atkarīgs no elastības konstantēm, tāpēc uzdevuma vienkāršošanai turpmāk Puasona koeficientu pielīdzinam $\mu = 0$.

Ievedot spriegumu funkciju φ un ievietojot (2.24) sakarības

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \mu = 0$$

iegūstam

$$\Pi^{(i)} = \Pi^{*(i)} = \frac{1}{2E} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.25)$$

Sprieguma funkcijas φ apmierina (2.23).

Funkcijas (2.21) koeficientus nosakām no nosacījuma:

$$\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \alpha_3} = 0 \dots \quad (2.26)$$

kas dod lineārus vienādojumus pret $\alpha_1, \alpha_2 \dots$

Rindā (2.21) pieņemot

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right), \quad S = const$$

tieka apmierināti robežnosacījumi (2.23), jo

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Pārējos funkcijas $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ izvēlās tā, lai atbilstošie spriegumi uz robežas būtu nulles:

$$\varphi = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots)$$

Pirmā turpinājumā pieņem $\alpha_1 \neq 0$, citi koeficienti līdzinās nullei:

$$\varphi = \frac{1}{2} Sy^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

Risinājumu dabū no

$$\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \alpha_1} = 0, t.i. \quad \alpha_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

Kvadrātveida plātnēi ($a = b$) atrodam

$$\alpha_1 = 0,04253 \frac{S}{a^6}$$

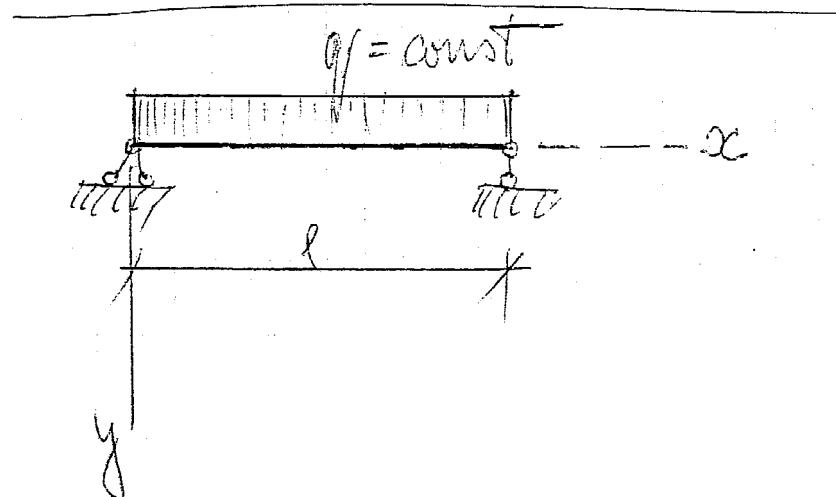
un visas spriegumu komponentes būs šādas:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= S \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1702 S \left(1 - \frac{3y^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \\ \sigma_y &= -0,1702 S \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2 \\ \tau_{xy} &= -0,6805 S \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

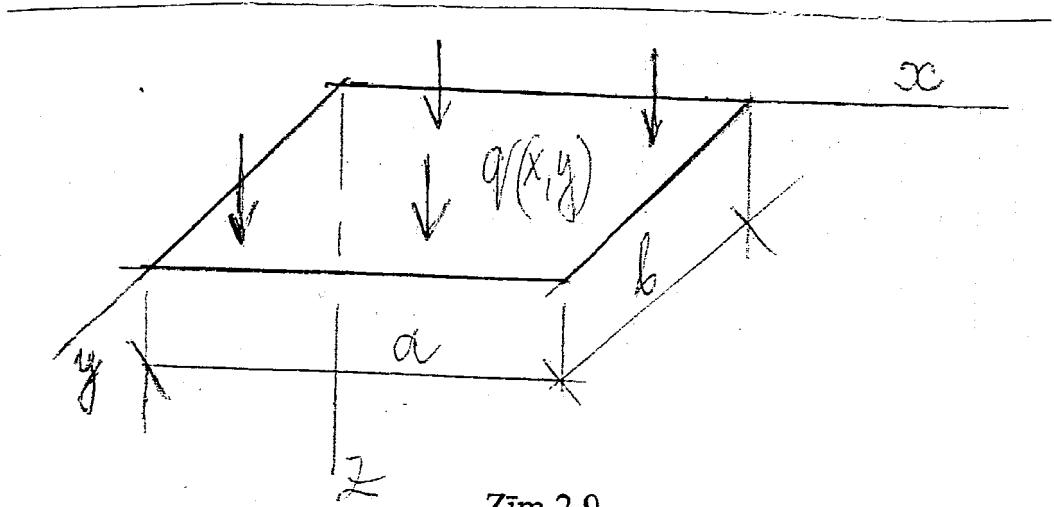
Spriegumu σ_x sadalījums šķēlumā $x = 0$ (zīm.2.6) dots 2.7 zīmējumā - līkne 2.

Precīzāka rezultāta iegūšanai rindā (2.27) jāsaglabā trīs locekļu un tad koeficientu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aprēķinam dabū trīs lineārus vienādojumus [10].

Palielinot plātnes garumu, spriegumu σ_x sadalījums šķēlumā $x = 0$ (zīm.2.6) kļūst arvien neviendabīgāks. Piemēram, ja $a=2b$, tad spriegumu sadalījums parādīts zīmējumā 2.7, līkne - 3.



Zim.2.8.



Zim.2.9

§2.9. Bubnova-Gałorkina metode

Noskaidrosim Bubnova-Gałorkina metodes būtību apskatot dažus piemērus [8]. Deformējama ķermeņa mehānikā Bubnova – Gałorkina metode izriet no virtuālo pārvietojumu principa.

Piemērs. 11. Aprēķināsim sijas izlieci, kas brīvi balstīta un noslogota ar vienmērīgi izkliedētu slodzi (zīm.2.8).

Sijas elastīgās līnijas ass lieces vienādojums šāds [1]

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0 \quad (2.28)$$

Robežnosacījumi

$$\text{ja } x = 0, l \quad \text{tad} \quad v = 0, \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

Izlieci aproksimē ar funkciju $v = a \sin \frac{\pi x}{l}$. Funkcija $EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q$ ir visu ārējo un iekšējo spēku projekcija uz y asi, kas darbojas uz bezgalīgi mazu sijas elementu. Izlieces funkcija v ir pārvietojums tās pašas ass y virzienā un to var uzskatīt par virtuālo pārvietojumu. Bubnova-Gałorkina metodes vienādojumu sastādam šādi

$$\int_0^l X \delta v dx = 0 \quad (2.29)$$

$$\text{kur } X = EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q$$

$$\delta v = \delta a \sin \frac{\pi x}{l} = \delta a \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$$

δa - patvaļīga variācija.

Tātad Bubnova-Gałorkina metodes vienādojums (2.29) aptuveni izsaka visu iekšējo un ārējo spēku virtuālo darbu uz iespējamiem pārvietojumiem δv , kas summā līdzinās nullei. Šī metode, tātad, balstās uz virtuālo pārvietojumu principu. Izlieces aproksimējošo funkciju ir jāizvēlās tā, lai tā apmierinātu ģeometriskos robežnosacījumus, bet statiskos apmierināt nav obligāti nepieciešams. Tomēr speciālos gadījumos arī statiskie jāapmierina.

Mūsu uzdevumā δa - patvaļīga variācija, kas nav vienāda ar nulli, tāpēc to var iznest ārpus integrēšanas zīmes; rezultātā dabū:

$$\int_0^l X \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0$$

$$\text{kur } X = EI a \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} - q.$$

$$\text{Pēc integrēšanas dabū } a = 4ql^4 / (\pi^5 EI)$$

Piemērs 12. Tālāk apskatam taisnstūra plātnes lieces uzdevumu (zīm.2.9). Plātnes slodze

Plātnes vidus virsmas lieces diferenciālvienādojums būs (Sofijas Žermēnas vienādojums):

$$X = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = D \nabla^4 w - q = D \nabla^2 \nabla^2 w - q = 0 \quad (2.30)$$

kur w – plātnes izlieces Z virzienā.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ - cilindriskais stingums.}$$

Plātnes lieces uzdevuma Bubnova-Gałorkina vienādojums būs

$$\int_0^b \int_0^a X \delta w dx dy = 0 \quad (2.31)$$

Pirmā turpinājumā pieņemot (kā sistēmu ar vienu kustības brīvību)

$$W = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

dabū

$$X = Da_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0 \text{ un}$$

$$dW = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Tā kā a_{11} – nenoteikts parametrs, bet δa_{11} – šī parametra patvalīga variācija, tad

$$\int_0^a \int_0^b \left[Da_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

Pēc integrēšanas dabū

$$Da_{11} \frac{\pi^4 ab}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - q_0 \frac{4ab}{\pi^4} = 0$$

jeb

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2} \quad (2.32)$$

Otrā turpinājumā pieņemam, ka sistēmai divas kustības brīvības.

$$W = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$$

rezultātā dabūjam

$$X = D \pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q_0 \right] \quad (2.33)$$

$$dW = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \quad (2.34)$$

Ievietojot (2.34) vienādojumā (2.31) dabūjam

$$\int_0^a \int_0^b X \left(\delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} q_0 \right) dx dy = 0$$

Tā kā a_{11} un a_{13} ir neatkarīgi variējami parametri, dabūjam

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0 \\ \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy &= 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ievietojot sakarībās (2.35) izteiksmi (2.33) pēc integrēšanas dabū a_{11} un a_{13} vērtības:

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2}; \quad a_{13} = \frac{16q_0 a^4}{3\pi^6 D (1 + 9a^2/b^2)^2}$$

Vienādojumi (2.28) un (2.30) ir stieņa un plātnes bezgalmaza elementa līdzvara vienādojumi. Meklējamo funkciju variācijas δw ir virtuālie pārvietojumi, tāpēc vienādojums (2.31) traktējams kā Lagranža variāciju vienādojums, ja nav masu radītie spēki, bet virsma spēku darbs uz virtuāliem pārvietojumiem vienlīdzīgs nullei. Lai pēdējais nosacījums izpildītos, t.i. lai virsma spēku daebs uz virtuāliem pārvietojumiem līdzinātos nullei, ir nepieciešams, lai ķermeņa punktu pārvietojumu aproksimējošās funkcijas apmierinātu ne tikai ģeometriskos, bet arī statiskos robežnosacījumus. Sīkāk par šo jautājumu skat. speciālā literatūrā.

Mūsu apskatītie uzdevumi formulēti tādā veidā, ka izlieces funkcijas w aproksimācijai jāapmierina kā ģeometriskie, tā arī statiskie robežnosacījumi.

Plāno lokano plātnu izlieces apraksta nelineārie diferenciālvienādojumi. Pielietojot to atrisināšanai Bubnova-Gałorkina metodi mēs nonākam pie nelineāriem algebriskiem vienādojumiem, kuru atrisināšanā bieži ir sarežģīta.

3.nodaļa. GALĪGO ELEMENTU METODE (GEM)

§3.1. GEM galvenās operācijas

Saskaņā ar galīgo elementu metodi nepārtrauktu konstrukciju domās sadala atsevišķos galīgalieluma un skaita elementos, kas savienoti tikai mezglu punktos. Galīgie elementi mēdz būt stieņi un to posmi stieņu sistēmām, plātnēm - trijstūra vai četrstūra elementi, čaulas var sadalīt plakanos vai telpiski liektos trijstūra vai četrstūru elementos, masīvos ķermēņus sadala tetraedros vai paralelpipedos. Elementus savieno mezglos - stūra punktos, bet arī starp stūra punktiem. Galīga skaita mezglu punktu pārvietojumi, ja pielieto pārvietojumu metodi, ir uzdevuma nezināmie. Šādu sistēmu ar galīgu kustības brīvību skaitu aprēķins noved pie algebrisku vienādojumu sistēmas, ko var atrisināt ar datorprogrammu

Elementus savieno mezglu punktos, jāievēro līdzsvara nosacījumus, atbilstošo mezglu pārvietojumiem jābūt vienādiem (pārvietojumu nepārtrauktība), sakarību starp mezglu piepūlēm un pārvietojumiem nosaka fizikālie likumi - lineārā gadījumā Huka likums. Jāievēro konstrukcijas balstījums (robežnosacījumi).

Pirms konstrukcijas aprēķina jāizpēta atsevišķā galīgā elementa spriegumu-deformēto stāvokli atkarībā no mezglos pieliktiem spēkiem un to pārvietojumiem, parasti pieņemot vienkāršotas hipotēzes. Pēc tam savienojot elementus mezglos veido konstrukcijas aprēķina modeli (piemēru skat. zīm.3.1).

§3.2. GEM pārvietojumu metodes formā

Aplūkosim divdimensiju plakano uzdevumu ievedot koordinātu sistēmu x, y. Nepārtraukto vidi sadalām iedomātos galīgos trijstūru elementos (zīm.3.1). Atsevišķie trijstūra elementi savienoti mezglos trijstūru virsotnēs. Uzdevuma nezināmie lielumi ir mezglu pārvietojumi (pārvietojumu metode). Atsevišķo elementu deformācijas tuvināti izsaka kā atkarīgas no mezglu pārvietojumiem.

Apskatam atsevišķu trijstūri (zīm.3.2). Trijstūra virsotņu pārvietojumu komponentes, uzdevuma nezināmie, veido sešdimensiju vektoru

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Trijstūra elementa (zīm.3.2) 1,2, 3 pārvietojumus pieņemam lineāru koordinātu x, y funkciju veidā:

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases}$$

kur $\alpha_1 \dots \alpha_6$ - katra elementa robežas ir konstantes. Mezglu punktu pārvietojumi būs (zīm.3.2)

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Pārvietojumu sakarība

$$u = N\delta$$

kur N - formas funkcijas matrica. Vienkārši pārveidojumi dod:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_{ix} + c_{iy}) \quad i = 1, 2, 3$$

kur A – trijstūra laukums, $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, pārējos koeficientus dabū cikliski mainot indeksus.

Elementa formas funkcijas parādītas zīm..... Izmantojot Koši vienādojumus dabū deformācijas:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2A} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3)$$

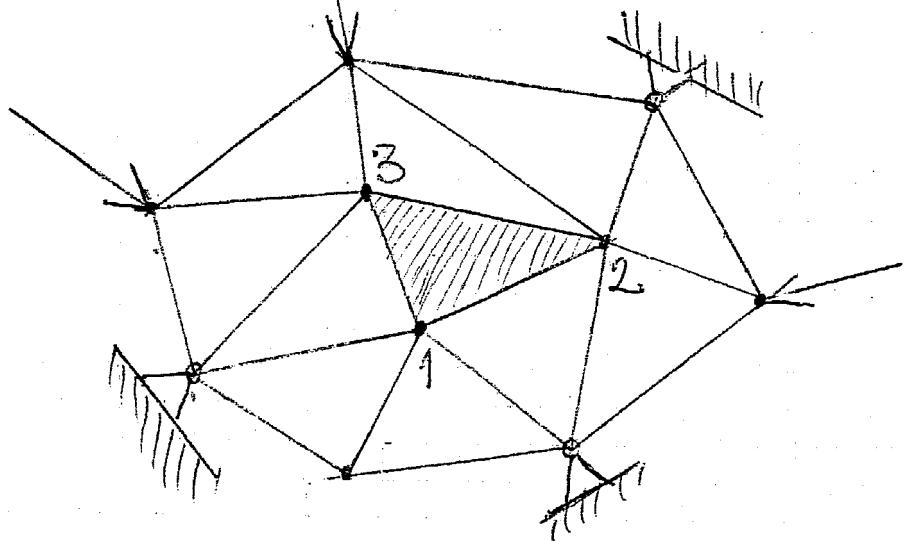
$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2A} (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3)$$

jeb matricu formā

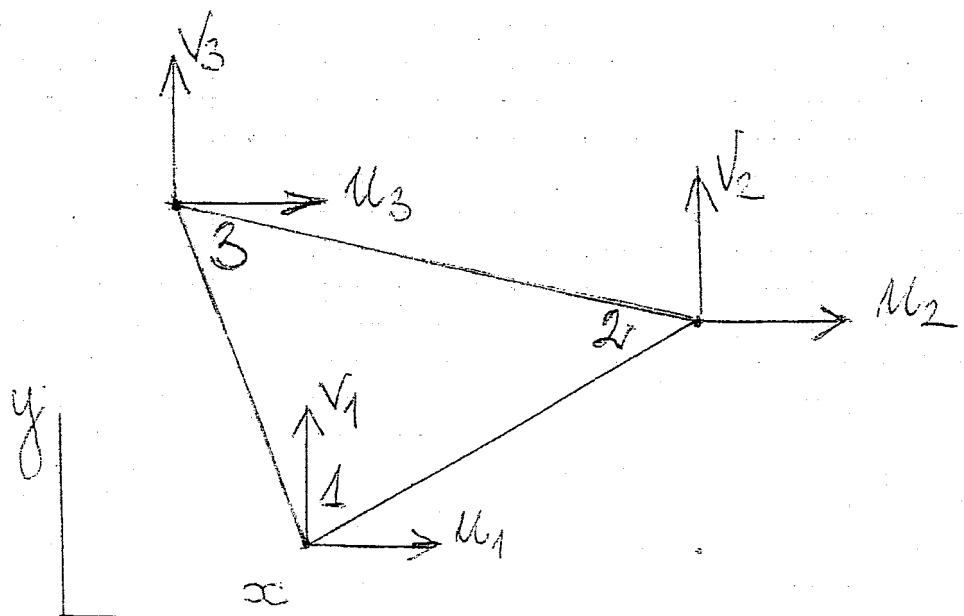
$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$$

kur

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_{10} & b_{30} & b_{20} \\ 0c_1 & 0c_3 & 0c_2 \\ c_1 b_1 & c_3 b_3 & c_2 b_2 \end{bmatrix}$$



Zim.3.1



Zim.3.2

Sakarību starp deformācijām un spriegumiem dod Huka likums:

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

kur

μ - Puasona koeficients, E - elastības modulis.

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

jeb īsāk

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Sakarība starp spriegumiem un mezglu pārvietojumiem būs

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}$$

[D] satur elastīgo īpašību raksturojumu, [B] - ģeometrijas raksturojumu.

Apzīmējot ar {F} - mezglu slodžu vektoru, kam atbilst pārvietojumi {δ}, uzrakstam ārējo un iekšējo darbu vienādību, kā līdzsvara nosacījumu

$$\frac{1}{2}\{\delta\}^T \{F\} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Ievērojot, ka

$$\varepsilon = B\delta \text{ un } \sigma = D\varepsilon = DB\delta \text{ dabū } \varepsilon^T \sigma = (B\delta)^T DB\delta$$

Ievērojot matricu darbības kārtulu $(AB)^T = B^T A^T$ dabū

$$F = \int_V B^T DB dV \delta \text{ jeb dotam trijsstūrim}$$

$$\{F\} = [B]^T [D][B]\{\delta\} At$$

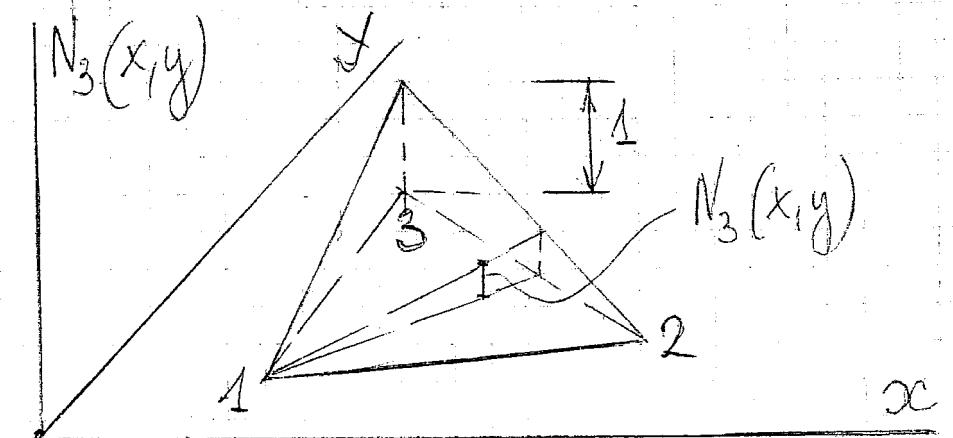
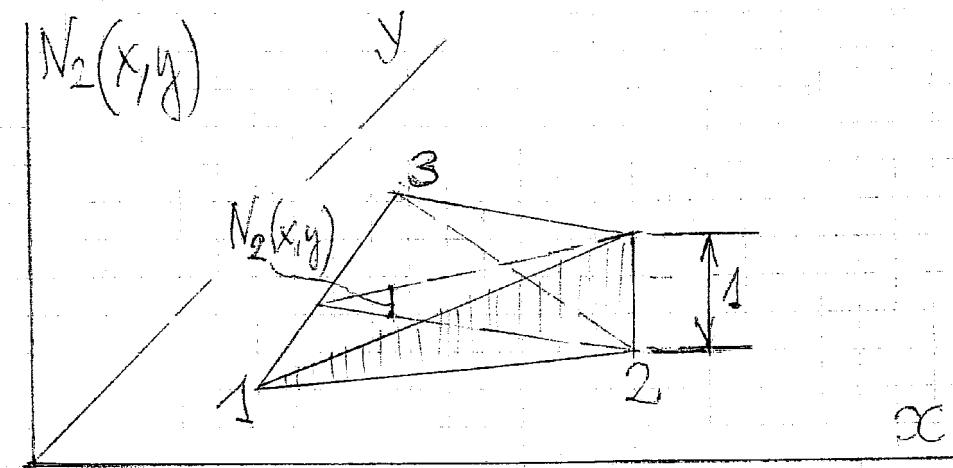
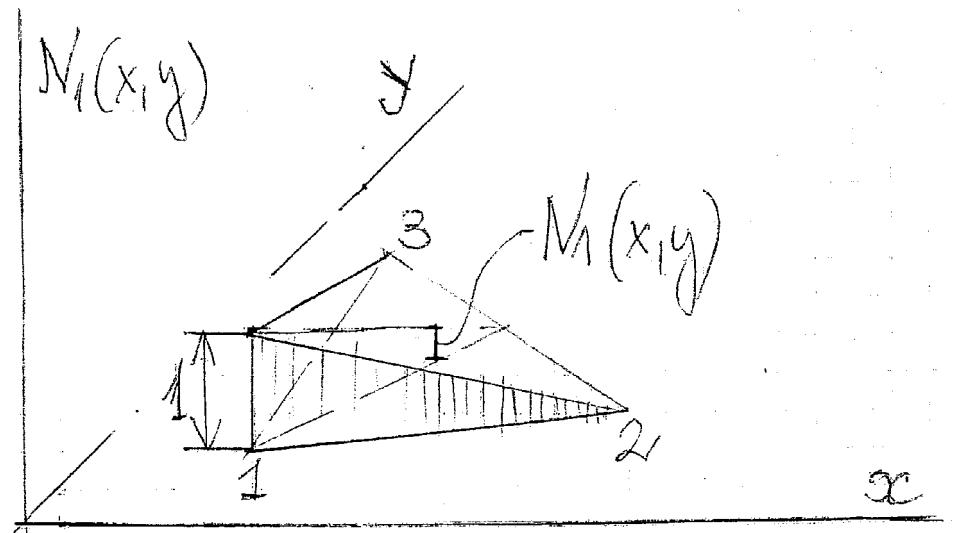
kur t - trijsstūra biezums, jeb

$$\{F\} = [r]\{\delta\},$$

kur matrica $[r] = [B^T][D][B]At$ - stinguma matrica, kur A- elementa laukums, t – biezums.

Tālāk apskatam visu konstrukciju, ko modelē visu trijsstūru kopa. Visas konstrukcijas līdzsvara nodrošināšanai formulēsim katram mezglu punktam. Sistēmas punktos darbojas spēki, kuru vektors $\{P\}$. Katram mezglam piekļaujas n_i galīgie elementi. Katra mezgla stinguma matrica būs visu mezglam piekļauto elementu stingumu matricu summa, t.i.

$$[r] = \sum_{s=1}^{n_i} [r_{is}]$$



Zīm.3.3
Elementa formas funkcijas N_1 , N_2 , N_3

Mezglu pārvietojumu vektors $\{\delta^a\}$, t.i.

$$\{\delta^a\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \text{ u.t.t.}$$

kur m - nebalstīto mezglu skaits.

Mezglu koncentrēto spēku vektors

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_m \end{Bmatrix}, \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \text{ u.t.t.}$$

Sakarība starp spēkiem $\{P\}$ un pārvietojumiem $\{\delta^a\}$ būs

$$\{P\} = [R]\{\delta^a\}$$

kur $[R]$ - visas konstrukcijas mezglu stinguma matrica

$$[R] = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ r_m \end{Bmatrix}, \quad [r] = \sum_{s=1}^n [r_s], \quad n_i \text{ mezglam } i \text{ piekļauto elementu skaits,}$$

kur r_{is} – katra atsevišķā elementa stinguma matrica.

Pārvietojumus $\{\delta^a\}$ atrod

$$\{\delta^a\} = [R]^{-1}\{P\}$$

kas ir uzdevuma atrisinājums.

Galīgo elementu metodi var arī traktēt kā variāciju metodi, pārvietojumu metodes formā, kā Ritca metodes paveidu. Visu elementu pārvietojumi būs

$$u = \tilde{N}\delta^{(a)}$$

\tilde{N} satur visas elementu formas funkciju matricas. Ignorējot tilpuma spēkus pilnā potenciālā energija būs

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV - \delta^{(a)T} P$$

vai

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \delta^{(a)T} \tilde{B}^T DB \delta^{(a)} dV - \delta^{(a)T} P$$

Nezināmos mezglu pārvietojumus $\delta^{(a)}$ atrod no pilnās potenciālās energijas minimuma nosacījuma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta^{(a)}} = 0$$

§3.3. Taisnlenķa trijstūra stinguma matrica

Konkrētu uzdevumu risināšanai izskaitļosim zīm.3.3 parādītā trijstūra stinguma matricu:

$$[r] = [B]^T [D][B]At$$

Saskaņā ar (skat.27.lpp.) atrodam elementa ģeometriskos lielumus, pieņemot $a = 1$.

$$\begin{array}{l} b_1 = 2 - 0 = 2 \\ b_2 = 0 - 2 = -2 \\ b_3 = 0 - 0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 - 0 = 1 \\ c_2 = 0 - 0 = 0 \\ c_3 = 0 - 1 = -1 \end{array}$$

Matrica $[B]$ iegūst veidu

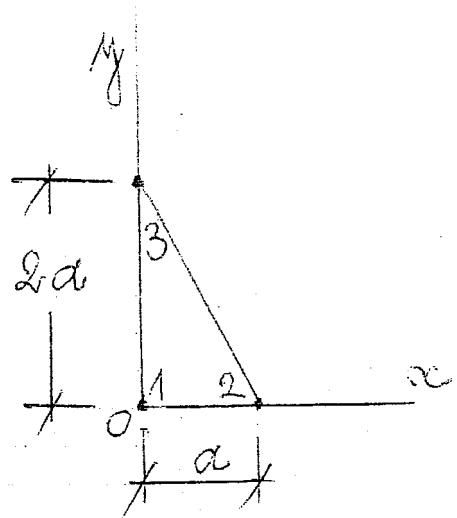
$$[B] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica $[D]$ būs

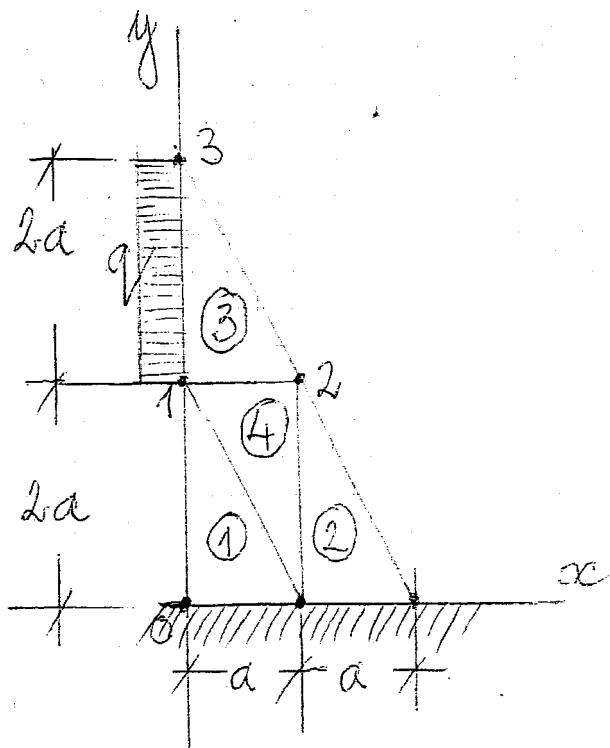
$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

Pieņemot $\mu = 0,3$ un $a = 1$ iegūst stinguma matricu $[r]$

$$r = \frac{Et}{12(1-\mu^2)} \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 13,05 & 3,9 & -12 & -2,1 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 7,2 & -1,8 & -4,2 & -2,1 & -3 \\ \hline -12 & -1,8 & 12 & 0 & 0 & 1,8 \\ -2,1 & -4,2 & 0 & 4,2 & 2,1 & 0 \\ \hline -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$



Zim.3.4



Zim.3.5

§3.4. Atbalsta sieniņas aprēķins

Izmantojot sakarību: $\{F\} = [R]\{\delta\}$, no kuras aprēķinam mezglu pārvietojumus un spriegumus elementos 1, 2, 3 un 4, skat.zīm.3.4 un 3.5.

Piemērs 13 aizgūts no [14].

Sistēmas (zīm.3.5) matricu R iegūstam no algoritma

$$R = \begin{bmatrix} r_{11}^{(3)} + r_{33}^{(1)} + r_{22}^{(4)} & r_{12}^{(3)} + r_{21}^{(4)} & r_{13}^{(3)} \\ r_{21}^{(3)} + r_{12}^{(4)} & r_{22}^{(3)} + r_{33}^{(2)} + r_{11}^{(4)} & r_{23}^{(3)} \\ r_{31}^{(3)} & r_{32}^{(3)} & r_{33}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Pārvietojumu metodes vienādojumu sistēma būs

$$26,1U_1 + 3,9V_1 - 24U_2 - 3,9V_2 - 1,05U_3 - 1,8V_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{Et} = 0$$

$$3,9U_1 + 14,4V_1 - 3,9U_2 - 8,4V_2 - 2,1U_3 - 3V_3 + 0 = 0$$

$$-24U_1 - 3,9V_1 + 26U_2 + 3,9V_2 + 0U_3 + 1,8V_3 + 0 = 0$$

$$3,9U_1 - 8,4V_1 + 3,9U_2 + 14,4V_2 + 2,1U_3 - 0V_3 + 0 = 0$$

$$-1,05U_1 - 2,1V_1 + 0U_2 + 2,1V_2 - 1,05U_3 + 0V_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{Et} = 0$$

$$1,8U_1 - 3V_1 + 1,8U_2 + 0V_2 - 0V_3 + 0U_3 + 3V_3 + 0 = 0$$

Atrisinot šo sistēmu ar Gausa metodi [2] dabūtie rezultāti sakopoti tabulās 3.1 un 3.2.

Pilnīgai GEM apgūšanai nepieciešams izstudēt darbus [1,2,8,9,13,15].

Mezglu pārvietojumu tabula 3.1

U ₁	V ₁	U ₂	V ₂	U ₃	V ₃
12,08	5,06	11,87	-2,47	37,51	5,18

Elementu spriegumu tabula 3.2

Spriegums	1.trijsstūris	2.trijsstūris	3.trijsstūris	4.trijsstūris
σ_x	0,8333	-0,4065	-0,2057	0,6322
σ_y	2,3226	2,2832	1,9986	0,6098
τ	2,7778	-1,3550	-0,0010	1,4228

§ 3.5. Plātnu liece

Iepriekšējos paragrāfos iegūtā formula

$$F = \int_V B^T D B dV \delta \quad \text{jeb matricu formā}$$

$$\{F\} = [r]\{\delta\} \quad (3.5.1)$$

kur $r = \int_V B^T D B dV$ - elementa stinguma matrica, ir GEM pārvietojumu varianta pamaformula un izmantojama dažāda veida konstrukciju aprēķiniem. Stinguma matricas sastādīšanai nepieciešamas divas matricas: Huka likuma elastīgo konstanču matrica, un matrica B, kas saista elementa pārvietojumus un deformācijas. Atradīsim šīs matricas plātnes lieces uzdevumam.

Apskatīsim liektas plātnes taisnstūra galīgo elementu (zīm.3.6a). Katra mezgla (stūru punkta) trīs visparinātos pārvietojumus pieņemam par uzdevuma nezināmiem: izlieci w , divus stūra normāles pagriezienus - $\partial w / \partial y$ un $\partial w / \partial x$. Rezultātā elementa vispārināto pārvietojumu pilnais vektors satur 12 komponentes:

$$\bar{\delta} = \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A \\ \bar{Z}_B \\ \bar{Z}_C \\ \bar{Z}_D \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}_A = \begin{bmatrix} w_A \\ (\partial w / \partial y)_A \\ (\partial w / \partial x)_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}_B = \dots \quad (3.5.2)$$

Tātad elementam ir 12 brīvības pakāpes. Elementa izliektās (deformētās) virsmas vienādojumu formulēsim polinoma veidā, kas satur 12 konstantes, piemēram, šādi:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + \\ + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

Izsakot parametrus a_1, \dots, a_{12} ar Z_1, \dots, Z_{12} palīdzību, izteiksim bāzes funkcijas (formas funkcijas) $N_i(x, y)$:

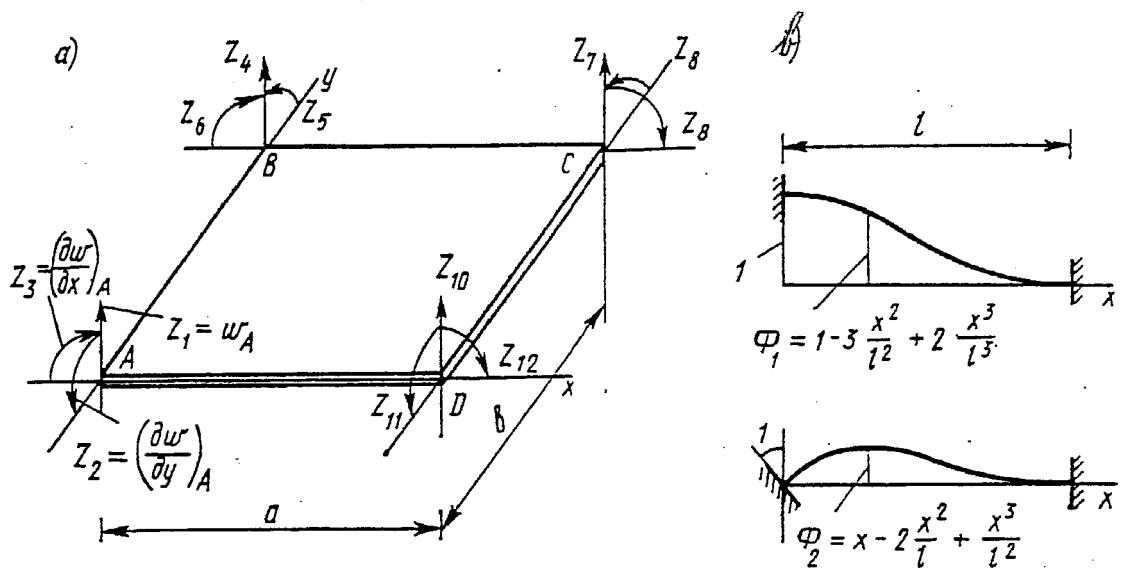
$$w = \sum_{i=1}^{i=12} Z_i N_i(x, y) \quad (3.5.3)$$

Mezgla A pirmās trīs bāzes funkcijas būs šādas:

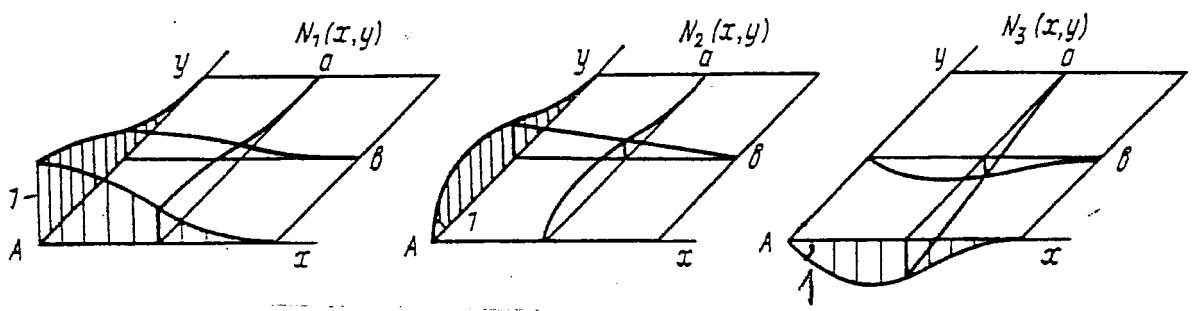
$$N_1 = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \Phi_1\left(\frac{x}{a}\right) + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \Phi_1\left(\frac{y}{b}\right) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right);$$

$$N_2 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \Phi_2\left(\frac{y}{b}\right); \quad N_3 = -\left(1 - \frac{y}{b}\right) \Phi_2\left(\frac{x}{a}\right),$$

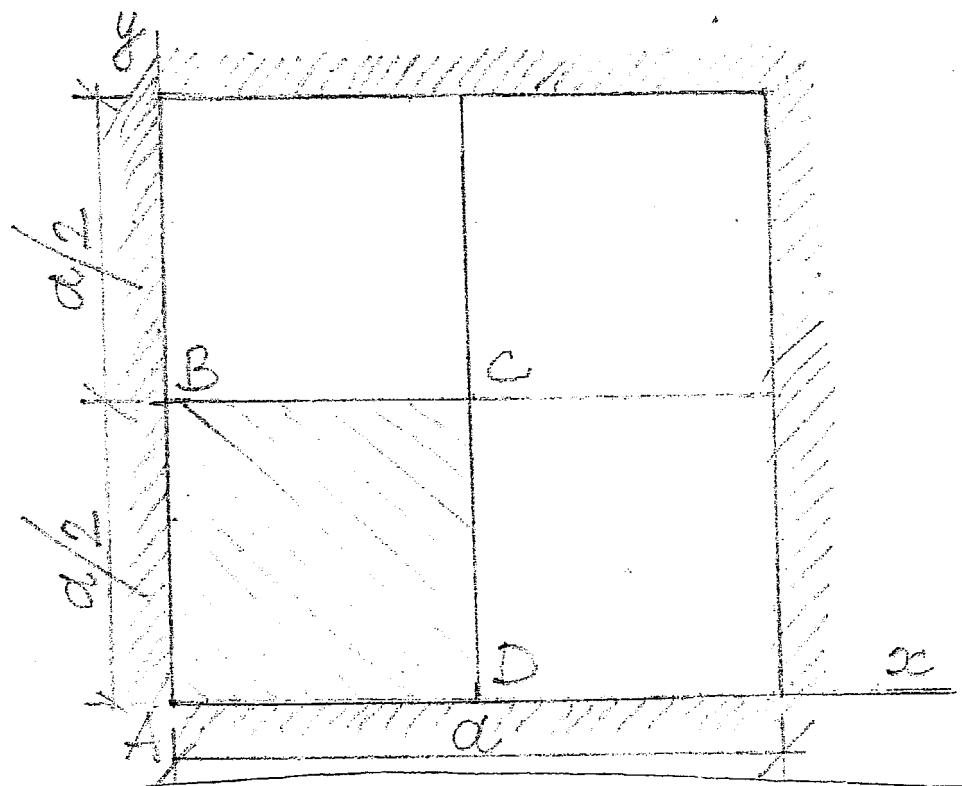
kur Φ_1 un Φ_2 - galos iespīlētu siju izlieces funkcijas no iespīlējumu vienības pārvietojuma vai iespīlējuma vienības pagrieziena (3.6 b zīm.).



Zim. 3.6



Zim. 3.7



Zim.3.8

Trīs bāzes (vai formas) funkciju veids parādīts 3.7.zīmējumā. Pārējās formas funkcijas konstruē analogiski.

Katram plātnes elementam ir trīs raksturīgās deformācijas:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.5.4)$$

kurām atbilst lieces un vērpes momenti

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \quad H = (1 - \mu)\kappa \quad (3.5.5)$$

Deformācijas (3.5.4) ar piepūlēm (3.5.5.) saista Huka likums, ko izsakam matricu formā:

$$\vec{M} = D\vec{\kappa} \quad (3.5.6)$$

kur

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 2H \end{bmatrix}; \quad \vec{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \mu) \end{bmatrix} \quad (3.5.7)$$

$D = Et^3 / [12(1 - \mu^2)]$ - plātnes cilindriskais stingums.

Matricu \mathbf{B} , kas saista deformācijas $\vec{\kappa}$ ar elementa pārvietojumiem \vec{Z} , dabū ievietojot vienādojumā (3.5.4) izteiksmi (3.5.3):

$$\vec{\kappa} = \mathbf{B}\vec{Z} \quad (3.5.8)$$

kur

$$\mathbf{B} = - \begin{bmatrix} \partial^2 N_1 / \partial x^2 & \dots & \partial^2 N_{12} / \partial x^2 \\ \partial^2 N_1 / \partial y^2 & \dots & \partial^2 N_{12} / \partial y^2 \\ \partial^2 N_1 / \partial x \partial y & \dots & \partial^2 N_{12} / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

Ievietojot matricas \mathbf{D} un \mathbf{B} formulā (3.5.1) un integrēšanas pa tilpumu vietā integrējot pa plātnes laukumu, iegūstam galīgā elementa lieces stinguma matricas izskaitlošanas formulu:

$$[r] = \iint_{0,0}^{b,a} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (3.5.10)$$

Matricu formā sakarību starp galīgā elementa mezglu piepūlēm un pārvietojumiem šāda:

$$\{F\} = [r]\{\delta\} \quad (3.5.11)$$

kur $\{F\}$ - mezglu piepūļu vektors,

$[r]$ - plātnes galīgā elementa stinguma matrica. Četrstūra elementam tās dimensija 12x12, bet tās elementus aprēķina saskaņā ar formulu (3.5.10).

$\{q\}$ - pārvietojumu vektors. Stinguma matricas $[r]$ koeficienti $k_{i,j}$ ir piepūles i virzienā no vienības pārvietojuma j - virzienā.

Ja uzdevuma atrisināšanai pielieto pārvietojumu metodi, tad visiem mezglu punktiem jāsastāda līdzsvara vienādījumus. Nosakot mezglu pārvietojumus, var atrast izlieču funkciju w (3.5.3) un tālāk aprēķinam lieces un vērpes momentus (3.5.5).

Piemērs Nr.14. Analizējam kvadrātveida plātnes izlieci, ja tās malas iespīlētas un ja tā sloganota ar vienmērīgu šķērsslodzi $q_0 = \text{const.}$ (zīm.3.8). Simetrijas dēļ apskatam ceturtdaļu plātnes ABCD. Sadalam plātni četros galīgos elementos - 2 x 2. Apzīmēsim pārvietojumus mezglā A ar Z_1, Z_2, Z_3 , punktā B - Z_4, Z_5, Z_6 , punktā C - Z_7, Z_8, Z_9 un punktā D - Z_{10}, Z_{11}, Z_{12} saskaņā ar zīm.3.6 un 3.8.

Ievērojot plātnes robežnosacījumus un deformāciju simetriju pret centrālām asīm secinām, ka tikai pārvietojums Z_7 nebūs vienāds nullei. Mezglu piepūle punktā C vienāda ar

$$F_7 = \frac{q_0}{4} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{16} = \frac{q_0 a^2}{16}$$

Reakciju $r_{7,7}$ atrodam no sakarības (3.5.10), rezultātā dabū

$$F_7 = r_{7,7} \cdot Z_7$$

$$\text{kur } r_{7,7} = \frac{79,44D}{a^2}$$

Ievērojot, ka $Z_7 = P_7 / r_{7,7}$ atrodam

$$Z_7 = 0,000787$$

Pirmā tuvinājumā aprēķinātā izliece iespīlētās kvadrāta plātnes vidū visai neprecīza. Precīzais rezultāts $w_{max} = 0,00126qa^4/D$.

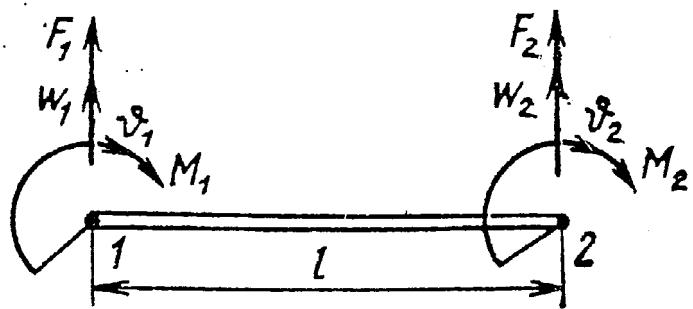
Precīzāku rezultātu iegūšanai plātnē jādala vairākos galīgos elementos, bet tad skaitliskos rezultātos iegūstam tikai izmantojot datorus. Tabulā parādīts, kā palielinot galīgo elementu skaitu, pieaug aprēķinu precizitāte.

Tīkla dalījums	2 x 2	4 x 4	8 x 8	16 x 16	Precīzs rezultāts
Izliece vidū $w_{max} / \frac{qa^4}{D}$	0,003444	0,003945	0,004040	0,004058	0,004062

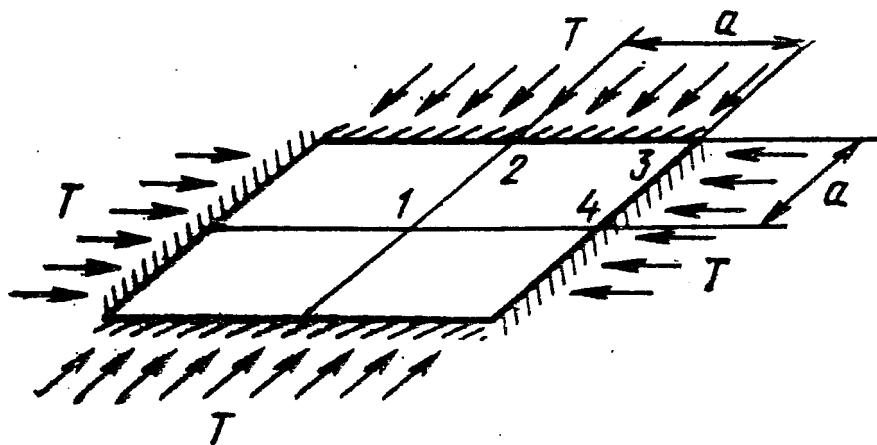
Jebkuras formas un asij simetrisku čaulu aprēķinu metodika ar GEM dota darbā [1],290 lpp.

§ 3.6. Noturības aprēķini ar GEM

Aplūkojam ideāli taisnu stieni no lineāri elastīga materiāla, kas slogots pilnīgi centrāli, t.i. spēka darbības ass sakrīt ar stieņa šķērsgriezumu smaguma centriem, veidojot taisni. Mazas spiedes slodzes gadījumā stienis ir līdzsvarā un saglabā sākotnējo taisno formu. Mūsu uzdevums ir atrast mazāko spiedes spēka kritisko vērtību, pie kurās iespējams stieņa ass izliekts līdzvara stāvoklis. Sastādīsim potenciālās enerģijas izteiksmi spiestam stienim, kas atrodas izliektā stāvoklī. Spiedes spēks N sistēmai pārejot no taisnā, nedeformētā stāvokļa deformētā līdzvara stāvoklī zaudē potenciālo enerģiju $\Pi^{(a)} = -N_1\Delta$, kur



Zim. 3.9



Zim.3.10

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l [w''(x)]^2 dx - \text{taisnā stieņa garuma un izliektā stieņa projekcijas starpība. Stieņa iekšējo spēku lieces deformācijas potenciālā enerģija būs}$$

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [w''(x)]^2 dx.$$

Pilnā potenciālā enerģija vienam galīgam elementam:

$$\Pi = \Pi^{(i)} - \Pi^{(a)} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [w''(x)]^2 dx - N/2 \int_0^l [w'(x)]^2 dx$$

Pieņemam tādu pašu izlieces funkcijas aproksimāciju, kā liecē, kas novēd pie aptuveniem rezultātiem, par cik noturības zuduma forma atšķiras no parastās lieces formas.

Stieņa garumu sadalām vienāda garuma galīgos elementos. Pārvietojumus pa normāli pret neitrālo līniju aproksimējam ar polinomu (kā parasti liecē):

$$w = \Phi_1 w_1 + \Phi_2 v_1 + \Phi_3 w_2 + \Phi_4 v_2 \quad (3.6.1)$$

kur w_1, w_2 - stieņa galu jeb mezglu pārvietojumi

v_1, v_2 - mezglu pagriezieni (zīm.3.9).

Funkcijas $\Phi_1 \dots \Phi_4$ ir sekojoši polinomi:

$$\Phi_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3};$$

$$\Phi_2 = \left(-\frac{x}{l} + 2 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right) l;$$

$$\Phi_3 = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3};$$

$$\Phi_4 = \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right) l$$

Potenciālās enerģijas minimuma nosacījumi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_2} = 0 \quad (3.6.2)$$

dod vienādojumu sistēmu

$$[k] - N[r]\{\Delta\} = 0 \quad (3.6.3)$$

kur $\{\Delta\} = \{w_1 \vartheta_1 \ w_2 \vartheta_2\}^T$ - mezglu pārvietojumu vektors

$[k]$ - elementa stinguma matrica.

Pastāvīga stinguma stieņiem

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

ģeometriskā stinguma matrica $[r]$:

$$[r] = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.5)$$

Matrica $[r]$ ievēro spiestā stieņa formas maiņu un tāpēc to mēdz saukt par ģeometriskā stinguma matricu.

Stienim, kas sadalīts vairākos galīgos elementos, kopējais noturības vienādojums analogisks (3.6.3)

$$(\bar{k} - N\bar{r})\bar{\Delta} = 0 \quad (3.6.6)$$

\bar{k} - globālā visas sistēmas stinguma matrica

\bar{r} - globālā ģeometriskā stinguma matrica.

Kritisko noturības zuduma spēku iegūstam, pielīdzinot sistēmas (3.6.6) determinanti nullei. Atzīmēsim, ka no determinanta tiek izslēgtas rindiņas un kolonas atbilstoši uzdevuma robežnosacījumiem.

Izvērstā veidā noturības vienādojums (3.6.6) šāds

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ g_1 \\ w_2 \\ g_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.6.7)$$

Apskatīsim dažus piemērus, pieņemot, ka stenis sastāv no viena galīga elementa, kura garums ir l . Ja stieņa viens gals iespīlēts ($w_1 = 0, g_1 = 0$), bet otrs balstīts locīklā ($w_2 = 0$), tad izteiksmē (3.6.7) jāizstrīpo pirmā, otrā un trešā rindiņa un kolona. Atlikušie locekļi sekojoši

$$\frac{4EI}{l} - \frac{2}{15} Nl = 0$$

un $N_{kr} = 30EI/l^2$.

Ja stieņa gali balstīti locīklās ($w_1 = w_2 = 0$), tad vienādojumā (3.6.7) izstrīpo pirmo un trešo rindiņu un kolonu (atbilstoši w_1 un w_2). Rezultātā iegūst determinantu

$$\begin{vmatrix} \left(4 - \frac{2}{15}z\right) & \left(2 + \frac{1}{30}z\right) \\ \left(2 + \frac{1}{30}z\right) & \left(4 - \frac{2}{15}z\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6.8)$$

kur $z = Nl^2/(EI)$.

No šejienes $N_{kr} = 12EI/l^2$, kas ļoti aptuvens, salīdzinot ar precīzi Eilera kritisko spēku $N_{kr} = \pi^2 EI/l^2$.

Rezultātu var uzlabot, sadalot stieni vairākos elementos. Sadalot stieni divos elementos, vienādojums (3.6.7) pārveidojas par šādu, kur

vidēja mezgla stinguma koeficienti saskaitīti un matricā parādīti raustītu līniju rāmītī.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 12 & -6l & -12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ EI & -12 & 6l & 24 & 0 & -12 & -6l \\ \hline l^3 & -6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 12 & 6l \\ 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cccccc} 36 & -3l & -36 & -3l & 0 & 0 \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 & 0 & 0 \\ N & -36 & 3l & 72 & 0 & -36 & -3l \\ \hline 30l & -3l & -l^2 & 0 & 8l^2 & 3l & -l^2 \\ 0 & 0 & -36 & 3l & 36 & 3l \\ 0 & 0 & -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{array} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ g_1 \\ w_2 \\ g_2 \\ w_3 \\ g_3 \end{Bmatrix} = 0$$

kur l - elementa garums, vienāds ar stieņa garuma \bar{l} pusi;

w_1 un w_3 ; g_1 un g_3 - gala šķēlumu pārvietojumi un pagrieziena leņķi;

w_2 un g_2 - vidējā, starpelementu mezgla pārvietojumi un pagriezieni;

\bar{l} - visa stieņa garums.

Locīklās balstītam stienim $w_1 = w_3 = g_2 = 0$; tā kā $g_1 \neq 0, g_3 \neq 0, w_2 \neq 0$, tad sistēmas (3.6.9) determinants vienāds ar nulli:

$$\begin{vmatrix} \left(4 - \frac{2}{15}z\right) & \left(6 - \frac{1}{10}z\right) & 0 \\ \left(6 - \frac{1}{10}z\right) & \left(24 - \frac{2}{5}z\right) & \left(-6 + \frac{1}{10}z\right) \\ 0 & \left(-6 + \frac{1}{10}z\right) & \left(4 - \frac{2}{15}z\right) \end{vmatrix} = 0$$

Raksturīgais vienādojums

$$\left(24 - \frac{1}{10}z\right)^2 - \left(8 - \frac{1}{15}z\right)\left(96 - \frac{12}{5}z\right) = 0$$

$$\text{No šejienes } N_{kr} = 9,94EI/\bar{l}^2 \quad (z = Nl^2/EI, \bar{l} = 2l)$$

Šis rezultāts tuvs Eilera spēkam $N_{kr} = \pi^2 EI/\bar{l}^2$, kur \bar{l} - visa stieņa garums.

Ja stieņa viens gals iespilēts ($w_1=0, g_1 = 0$, bet otrs balstīts locīklā ($w_3=0$., tad determinants būs

$$\begin{vmatrix} \left(24 - \frac{12}{5}z\right) & 0 & \left(-6 + \frac{1}{10}z\right) \\ 0 & \left(8 - \frac{4}{15}z\right) & \left(2 + \frac{1}{30}z\right) \\ \left(-6 + \frac{1}{10}z\right) & \left(2 + \frac{1}{30}z\right) & \left(4 - \frac{2}{15}z\right) \end{vmatrix} = 0$$

No kurienes $N_{kr} = 19,35EI/\bar{l}^2$

Taisnstūra plātnu noturības aprēķinos izmanto taisnstūra galīgos elementus ar 12 kustības brīvībām (skat.zīm.3.6) un atbilstošu izlieces aproksimāciju (3.5.3).

Kvadrāta formas plātni, kas spiesta divos virzienos ar vienādiem spēkiem T un kuras četras malas iespīlētas, var sadalīt četros vienādos galīgos elementos (zīm.3.10). Saskaņā ar dotiem robežnosacījumiem mezglu punktu 2,3,4 pārvietojumi un pagriezieni leņķi vienādi ar nulli. Izlieču aproksimācijā paliek tikai viens loceklis, kas raksturo pirmā punkta pārvietojumu, jo pagrieziena leņķis simetrijas dēļ šeit ir nulle:

$$w = \Phi_{11} w_1 \quad (3.6.10)$$

kur

$$\Phi_{11} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}\right) \quad (3.6.11)$$

Plātnes lieces deformācijas potenciālā enerģija

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H\chi) dx dy$$

kur M_x, M_y, H - lieces un vērpes momentu uz garuma vienību;

κ_x, κ_y, χ - vidus virsmas liekums un savērpums,

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \quad H = D(1-\mu)\chi$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ārējo spēku darbs uz pārvietojumiem, saistītiem ar plātnes malu pārvietojumiem

$$\Pi^{(a)} = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Pilnā potenciālā enerģija vienam galīgam elementam

$$\Pi = \Pi^{(i)} - \Pi^{(a)}$$

Pieņemot izlieces aproksimāciju saskaņā ar (3.6.10), no nosacījuma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0 \text{ dabū}$$

$$([k] - [r])\{\Delta\} = 0$$

kur

$$[k] = \frac{316,8}{30} \frac{D}{a^2} \text{ un } [r] = \frac{552}{1260} T_{kr}, \quad T = N_x + N_y$$

No nosacījuma $[k] - [r] = 0$ dabū $T_{kr} = 24D/a^2$, kas tuva precīzam kritiskam spēkam $T_{kr} = 24,8D/a^2$.

§ 3.7. Dinamisko uzdevumu risināšana ar GEM

Universālā potenciālās enerģijas minima principa panākumi sistēmas līdzsvara noteikšanā pamudināja meklēt analogu universālu principu, kas dotu iespēju noteikt iespējamo sistēmas kustību.

Angļu fizikis Viljams Hamiltons (1805.-1865.) formulēja viņa vārdā nosauktu principu: no visiem domājamiem veidiem pārejot no kāda dotā sākuma stāvokļa momentā t_0 uz kādu citu dotu beigu stāvokli momentā t mehāniskā sistēma bez enerģijas dissipācijas izvēlās tādu pārejas veidu, kurā Hamiltona funkcionālam ir ekstremāla vērtība, t.i.

$$\delta H = 0, \text{ kur } H = \int_0^t (\Pi - K) dt - \text{Hamiltona funkcionāls}$$

Π - sistēmas pilnā potenciālā enerģija

K - kinētiskā enerģija.

Šeit $t=0$ un t - kustības sākuma un beigu momenti nu tiek salīdzināti savā starpā visi iedomājamie pārejas kustības veidi ar vienādiem sākuma un beigu nosacījumiem. Daudzos gadījumos funkcionālam H reālai kustībai ir minimāla vērtība, tāpēc to mēdz saukt arī par minimālās darbības principu. Minimālās darbības principu var pielietot kā sistēmām ar galīgu kustības brīvību skaitu, tā arī nepārtrauktām sistēmām.

Pielietosim Hamiltona principu sijas pašsvārstību frekvences noteikšanai neievērojot enerģijas dissipāciju ([1] un materiālu pretestības katedras metodiskie materiāli).

Uzdevuma atrisināšanai nepieciešams minimizēt funkcionāli

$$H = \int_0^t \left[\int_0^t (\Pi - K) d\eta \right] dt = \int_0^t \left[\int_0^t (U - A - K) d\eta \right] dt \quad (1)$$

kur U - sijas lieces potenciālā enerģija

A - ārspēku ierosinošie spēki un momenti

K - kinētiskā enerģija

Apskatam sijas svārstības ievērojot sijas pašsvaru (izkliedēta masa) un koncentrētas masas. Sija sadalīta galīgos elementos, kuras galos koncentrētas masas m_k un m_{k+1} . Brīvo svārstību gadījumā ierosinošo ārspēku nav (izņemot sākuma momentu), t.i. $A=0$ (skat.zīm.3.7.1).

Apskatam (1) komponentes

$$U = \frac{1}{2} EI(u'')^2$$

Kinētiskā enerģija vienāda ar izkliedētas masas K_m un koncentrēto masu $K_{m_k}, K_{m_{k+1}}$ sijas galos enerģijas summu.

$$K = K_m + K_{m_k} + K_{m_{k+1}}$$

$$K_m = \frac{1}{2} m(\dot{u})^2 = \frac{1}{2} \gamma AL(\dot{u})^2$$

kur m - viena GE masa

γ - blīvums

A - šķērsgriezuma laukums, L - GE garums (zīm.3.7.1)

$$K_{m_k} + K_{m_{k+1}} = \frac{1}{2} m_k (\dot{u}_k)^2 + \frac{1}{2} I_k \left(\frac{\partial u'_k}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_{k+1} (\dot{u}_{k+1})^2 + \frac{1}{2} I_{k+1} \left(\frac{\partial u'_{k+1}}{\partial t} \right)^2$$

kur m_k, m_{k+1} - sijas galos k un $k+1$ koncentrētās masas

I_k, I_{k+1} - masu inerces momenti

Harmonisko svārstību gadījumā atrisinājumu pieņemam harmonisko funkciju veidā

$$u(t) = u \sin \omega t; \quad u_{k+1}(t) = u_{k+1} \sin \omega t; \quad u_k(t) = u_k \sin \omega t$$

kur u - koordinātu funkcija, kuru izmanto sijas statiskās izlieces aprēķināšanai.

Izmantojot pieņemtās funkcijas funkcionālī (1) un integrējot perioda robežās $\frac{2\pi}{\omega}$, vienam galīgam elementam dabū:

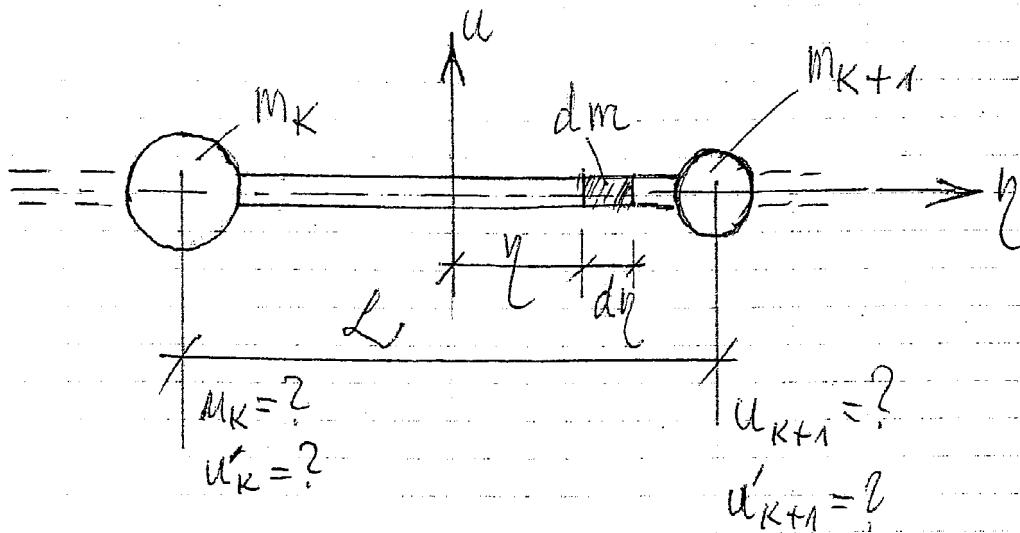
$$H_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} EI(u'')^2 d\eta - \frac{1}{2} \gamma AL \omega^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u^2 d\eta - \frac{1}{2} m_k u_k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_k (u'_k)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_{k+1} u_{k+1}^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_{k+1} (u'_{k+1})^2 \omega^2 \quad (2)$$

Minimizējot funkcionāli (2) vienam galīgam elementam, iegūstam standarta bloku matricas.

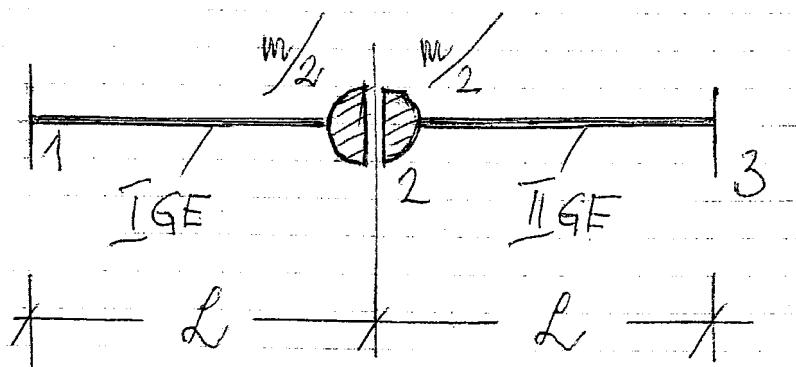
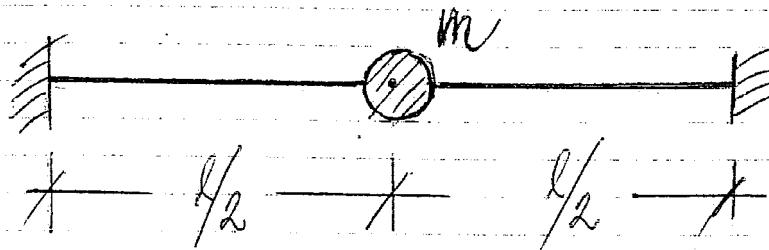
Pirmais saskaitāmais - lieces enerģija - pēc minimizācijas dod matricu, analogu kā statiskā liecē:

Nezināmā lieluma koeficients				
	u_k	u'_k	u_{k+1}	u'_{k+1}
$\frac{\partial u_l}{\partial u_k}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
$\frac{\partial u_l}{\partial u'_k}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
$\frac{\partial u_l}{\partial u_{k+1}}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
$\frac{\partial u_l}{\partial u'_{k+1}}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$

$= [K]$ (3)



Zim.3.7.1



Zim.3.7.2

$[K]\{u\} = \{p\}$ - lieces vispārējais vienādojums galīgā elementa izkliedēto masu raksturo bloks

$$\gamma A \omega^2 \begin{vmatrix} -\frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 & -\frac{9}{70}L & \frac{13}{420}L^2 \\ -\frac{11}{210}L^2 & -\frac{1}{105}L^3 & -\frac{13}{420}L^2 & \frac{1}{140}L^3 \\ -\frac{9}{70}L & -\frac{13}{420}L^2 & -\frac{13}{35}L & \frac{11}{210}L^2 \\ \frac{13}{420}L^2 & \frac{1}{140}L^3 & \frac{11}{210}L^2 & -\frac{1}{105}L^3 \end{vmatrix} = [M_1] \quad (4)$$

Beidzamie četri funkcionāla (2) locekļi pēc minimizācijas veido diagonālu matricu, kas ievērtē koncentrēto masu kinētisko energiju un šo masu rotācijas inerci GE mezglu punktos.

$$\omega^2 \begin{vmatrix} -m_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{k+1} \end{vmatrix} = [I] \quad (5)$$

Brīvo svārstību gadījumā uzdevuma matrica būs trīs matricu (3) (4) un (5) summa, kur brīvais loceklis ir nulle $([K] + [M] + [I])\{u\} = \{0\}$. Algebrisko vienādojumu bez brīvā locekļa netriviālais atrisinājums būs tad, ja sistēmas determinants vienāds ar nulli – $D = 0$, no kurienes dabū brīvo svārstību frekvenci.

Piemērs. Noteikt zīm.3.7.2 parādītās sistēmas brīvo svārstību frekvenci. Sija galos iespīlēta, tās vidū koncentrēta masa m , sijas izkliedēto masu neievērojam. Sijas lieces stingums EI .

Dalam siju divos GE , kuru garums L . Tā kā sijas masu neievērojam, tad $[M]_s = 0$ (4). Izmantojot matricas $[K]$ (3) un $[I]$ (5) iegūstam standarta bloku:

$$[K]_s + [I]_s = \begin{vmatrix} \frac{12EI}{L^3} - m_k \omega^2 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} - I_k \omega^2 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} - m_{k+1} \omega^2 & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} - I_{k+1} \omega^2 \end{vmatrix}$$

No diviem šādiem standarta blokiem veidojam visas sistēmas matricu vienādojumu

$$([K] + [I])\{u\} = \{0\}$$

No visas sistēmas vienādojuma izmantojot nosacījumu $D_{sist} = 0$ atrod pašsvārstību frekvenci ω .

Sistēmas vispārējas globālās matricas veidošanas shēma:

	u_1	u'_1	u_2	u'_2	u_3	u'_3		
$\frac{\partial H}{\partial u_1}$	/							
$\frac{\partial H}{\partial u'_1}$	/							
$\frac{\partial H}{\partial u_2}$	/							
$\frac{\partial H}{\partial u'_2}$	/							
$\frac{\partial H}{\partial u_3}$	0	0	/					
$\frac{\partial H}{\partial u'_3}$	0	0	/					

=

			0				

Koncentrētā masa m atrodas sijas vidū un tāpēc svārstību laikā tā pārvietojas vertikālā virzienā bez rotācijas. Tamdēļ rotācijas inerces momenti ir nulles, t.i. $I_2 = 0$. Robežnosacījumi šādi:

$$u_1 = 0, \quad u'_1 = 0, \quad u_2 \neq 0, \quad u'_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u'_3 = 0$$

Tādā veidā sistēmai paliek tikai viena brīvības pakāpe – u_2 , pārējās rindiņas un kolonas, kas atbilst nulles kustības vērtībām, tiek izsvītrotas. Globālā matricā paliek tikai viena rūtiņa (skat. globālās matricas shēmu). Rezultātā dabū vienādojumu bez labās pusēs:

$$\left[\left(\frac{12EI}{L^3} - m_2 \omega^2 \right) + \left(\frac{12EI}{L^3} - m_2 \omega^2 \right) \right] u_2 = 0$$

Tā kā mezglā 2 pirmā galīgā elementa masa vienāda ar otrā elementa masu un ir vienādas ar $m_2 = \frac{m}{2}$, tad rezultātā dabujam vienādojumu

$$\left(2 \frac{12EI}{L^3} - m_2 \omega^2 \right) u_2 = 0$$

Tā kā svārstību laikā $u_2 \neq 0$, tad

$$2 \frac{12EI}{L^3} - m_2 \omega^2 = 0, \text{ no kurienes}$$

$$\omega^2 = \frac{24EI}{L^3 m} = \frac{192EI}{l^3 m}$$

kas saskan ar precīzo rezultātu.

3.8 Rāmju noturības aprēķins ar enerģētisko metodi GEM formā

Rāmju, kuru stieņi centriski spiesti, kritisko slodzi aprēķina pielīdzinot nullei determinanti, kuru elementi ir pārvietojumu metodes stinguma koeficienti:

$$r_{ik} = r_{ik}^0 - P\gamma_{ik}, \quad (3.81)$$

kur

r_{ik}^0 - stingums bez ass spēka ievērošanas,

γ_{ik} - ģeometriskais koeficients, kas proporcionāls stieņa gala pārvietojumam Δ (zīm.3.8.1) un ievēro spiesta stieņa formas izmaiņu zaudējot noturību.

Pieņemot stieņa izlieces formu φ_i polinomu veidā, var izvairīties no transcendentu funkciju izmantošanas, kas tomēr dod precīzu rezultātu, bet apgrūtina datoru izmantošanu. Rezultātu ar polinomu izmantošanu var precizēt, sadalot stieni mazāka garuma elementos.

Stieņa mezglu saišu reakciju aprēķināšanas metodiku noskaidrosim apskatot piemēru. Aprēķināsim stieņa reakciju, kura viens gals iespilēts, bet otrs balstīts kustīgā locīklā, ja kreisais balsts pagriežas par mazu leņķi $Z = 1$ (zīm.3.8.1).

Stieņa potenciālā enerģija sastādīsies no stieņa lieces deformācijas energijas U^0 un spiedes spēka darba W ($EI = \text{const}$).

$$\Pi = U^0 - W$$

Pieņemot izlieci no $Z = 1$ tādu pašu funkciju kā no šķērsslodzes (neievērojot P darbību), polinoma veidā

$$w(x) = f(x) = x - \frac{3}{2} \frac{x^2}{l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^2}, \text{ dabūjam}$$

$$U^0 = \frac{1}{2} r_{11}^0 Z^2, \text{ kur } r_{11}^0 = \int_0^l EI(f'')^2 dx = \frac{3EI}{l}$$

$$W = P \cdot \Delta = \frac{1}{2} P \gamma_{11} Z^2, \text{ kur } \gamma_{11} = \int_0^l P(f')^2 dx = \frac{Pl}{5}.$$

Tā tad stinguma koeficients noteikts aptuveni:

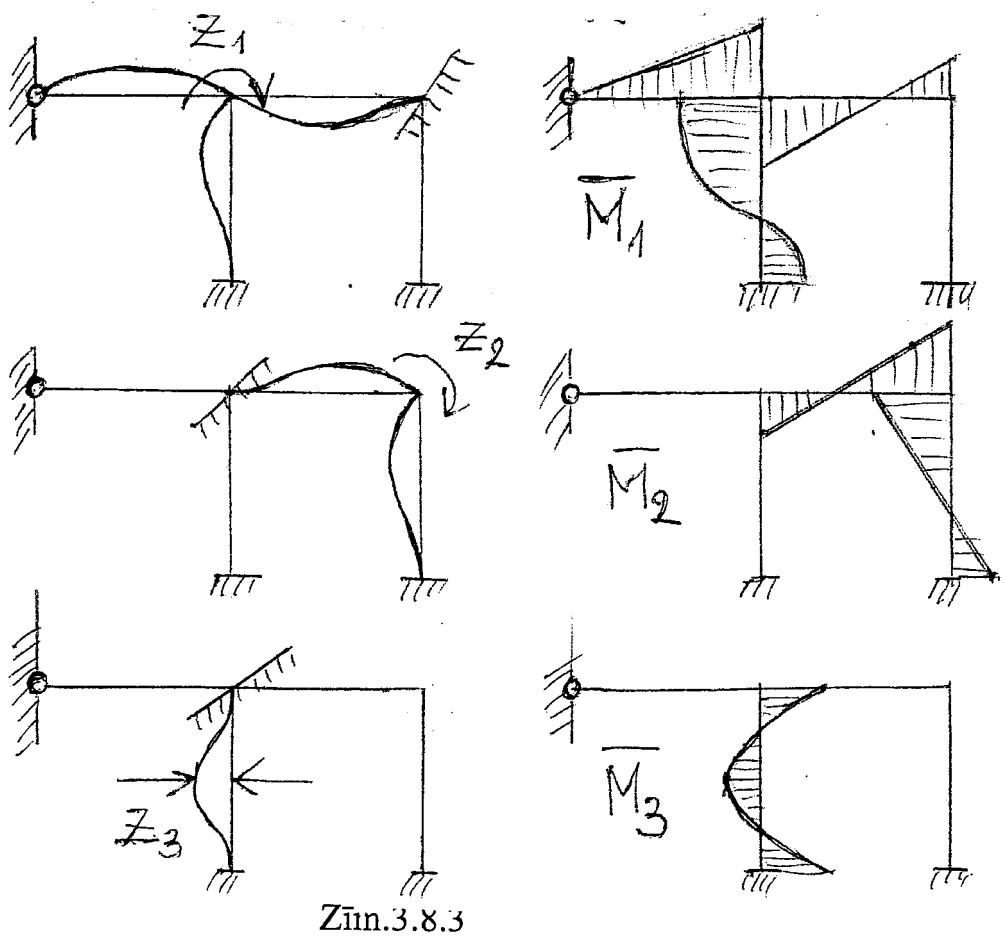
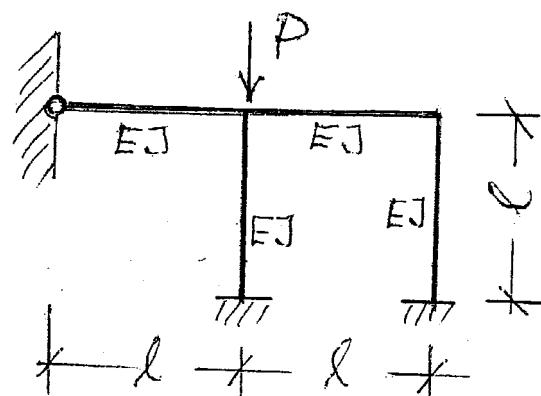
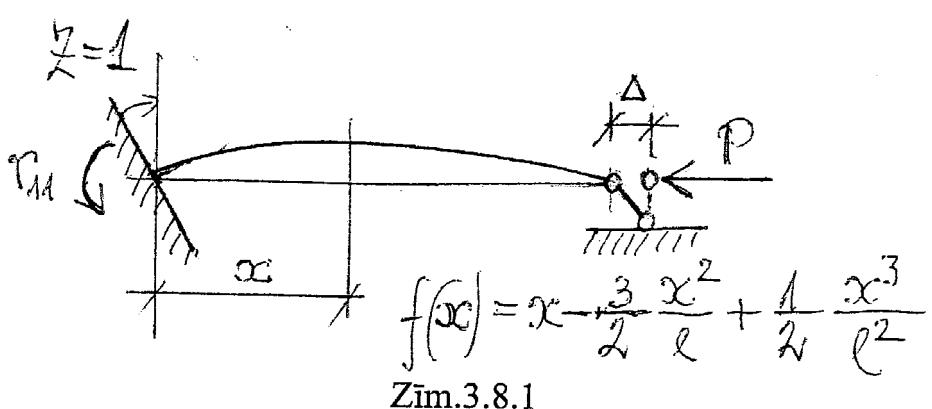
$$r_{11} = r_{11}^0 - P \cdot \gamma_{11},$$

kur r_{11}^0 - stingums bez p ievērošanas

γ_{11} - koeficients, kas proporcionāls Δ un raksturo spiestā stieņa formas izmaiņu, t.s. ģeometriskais koeficients.

Analogi jebkuram pārvietojumu metodes koeficientam būs

$$r_{ik} = r_{ik}^0 - P\gamma_{ik},$$



$$\text{kur } r_{ik}^0 = \sum_j \int_0^{l_j} EI \varphi''_{ij} \varphi''_{kj} ds$$

$$\gamma_{ik} = \sum_j \int_0^{l_j} P_j \varphi'_{ij} \varphi'_{kj} ds.$$

Šajās formulās saskaņā ar pārvietojumu metodi, mezgla stinguma koeficienti rāmja noturības aprēķinos tiek summēti.

Aptuvenās stinguma koeficientu vērtības (r_{ik}) no stieņu gala mezglu vienības pagriezieniem un pārvietojumiem sakopotas tabulā 3.8.1; stinguma koeficienti aprēķināti analogi kā apskatītā piemērā.

Stieņa enerģija matricu formā būs

$$\Pi = (1/2) \bar{Z}^T \bar{R} \bar{Z},$$

kur \bar{Z} - pārvietojuma vektors

R – stinguma matrica

$$R = R^0 - PG$$

R^0 - stinguma matrica neievērojot P

G – ģeometrisko parametru matrica, kas sastāv γ_{ik} elementiem.

Pilnās potenciālās energijas Π minima nosacījumi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Z_2} = 0; \dots \frac{\partial \Pi}{\partial Z_n} = 0$$

noved pie homogēnas vienādojumu sistēmas

$$(R^0 - PG)\bar{Z} = 0$$

P_k atrod pielīdzinot determinanti nullei:

$$D = |R^0 - PG| = 0$$

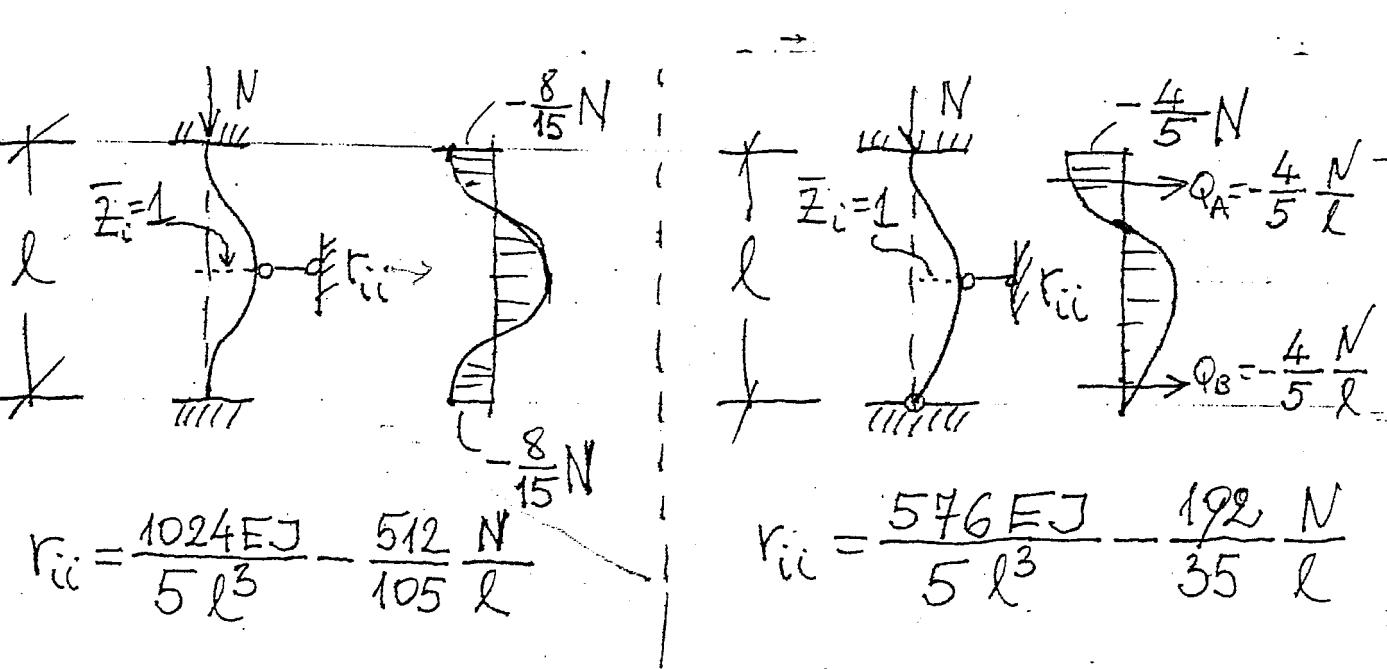
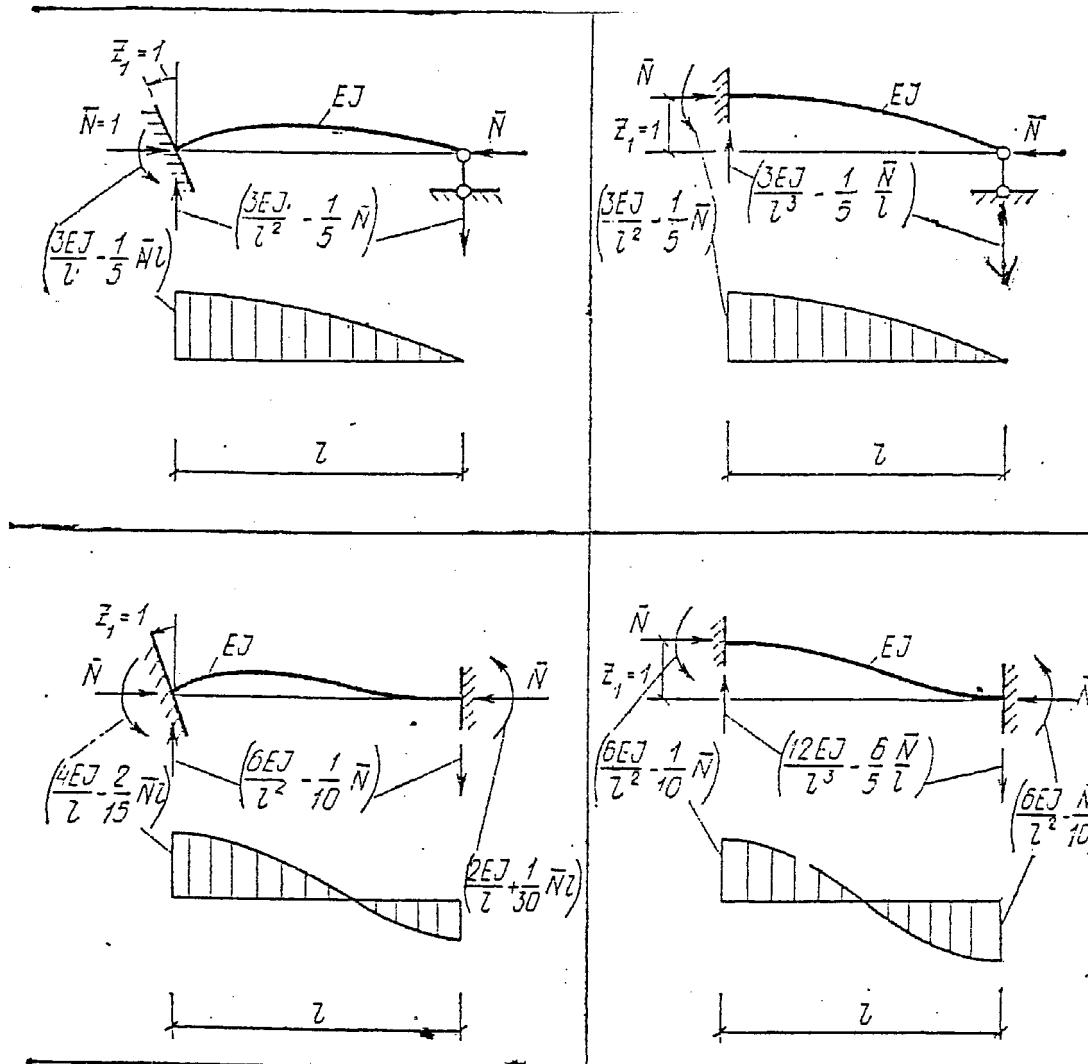
Salīdzinot ar klasisko pārvietojuma metodi, aptuvenā GEM precīzāka rezultāta iegūšanai stieņi jāsadala vairākos elementos, īpaši, ja rāmja mezgliem nav lineāru pārvietojumu [2, 13, 14].

GEM priekšrocība – var uzdevumus ar daudziem nezināmiem risināt ar datoriem, kas nav iespējams ar klasisko pārvietojumu metodi, vai apgrūtināts

Apskatīsim piemēru: aprēķināt minimālo kritisko spēku rāmim, kas parādīts 3.8.2 zīmējumā. Aprēķinu veiksim trīs variantos: vispirms atradīsim P_k ar klasisko pārvietojumu metodi, kas pieņemto hipotēžu ietvaros dod precīzu rezultātu un kas parocīga rēkinot „uz papīra ar roku”, ja nezināmo skaits neliels. Pieņemam, divus nezināmos: mezglu 1 un 2 pagrieziena leņķus – Z_1 un Z_2 . Atrodam mezgla reakcijas no vieninieku pārvietojumiem (zīm.3.8.3) [2, 14], tabulas 3.8.2 un 3.8.3.

$$r_{11} = 3 \frac{EI}{l} + 4 \frac{EI}{l} + 4 \frac{EI}{l} \varphi_2(V);$$

Tabula 3.8.1 Pārvietojumu metodes stieņu reakciju aptuvenās vērības
GEM formā



Tabula 3.8.2

	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3} \varphi_2(v) - \frac{1}{3} \varphi_3^2(v)$ $\varphi_4(v) = v^2 / 3(1 - \frac{v}{l})$
	$\varphi_2(v) = \frac{v(\lg v - v)}{8 \lg v (\lg v/2 - v/2)}$, $\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\lg v/2 - v/2)}$, $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6}$
	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3} \varphi_2(v) - \frac{1}{3} \varphi_3^2(v)$, $\eta_1(v) = 4\eta_2(v) - 3 \frac{\varphi_4^2(v)}{\varphi_2(v)}$
	$\eta_2(v) = \frac{8\varphi_2(v) - 4\varphi_3(v) - v^2}{12}$, $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{12}$
	$n = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, $v = nl = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$

Tabula 3.8.3

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,25	0,9958	0,9979	1,0010	0,9990	0,9750	0,9937
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,75	0,9619	0,9811	1,0095	0,9905	0,7743	0,9437
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,25	0,8908	0,9469	1,0274	0,9737	0,3700	0,8435
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,75	0,7751	0,8936	1,0563	0,9478	-0,2457	0,6926
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9194	-1,0884	0,4906
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8904	-1,6040	0,3700
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8665	-2,1917	0,2364
3,00	0,1361	0,6560	1,2058	0,8393	-2,8639	0,0893
3,25	-0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	-3,6428	-0,0713
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,75	-1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	-5,7568	-0,4341
4,00	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5060	-0,6372
4,25	-5,3838	0,1587	1,6327	0,6501	-11,4050	-0,8550
4,50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	-221,05	-1,0884
4,75	—	-0,2097	2,0468	0,5425	—	-1,3377
5,00	—	-0,4772	2,3924	0,4793	—	-1,6040
5,25	—	-0,8488	2,9232	0,4086	—	-1,8882
5,50	—	-1,4181	3,8234	0,3291	—	-2,1917
5,75	—	-2,4526	5,6223	0,2390	—	-2,5162
6,00	—	-5,1594	10,727	0,1361	—	-2,8639
6,25	—	-47,067	94,186	0,0172	—	-3,2380

$$r_{22} = 4 \frac{EI}{l} + 4 \frac{EI}{l}; \quad r_{12} = r_{21} = 2 \frac{EI}{l},$$

$$\text{kur } V = l \sqrt{\frac{P}{EI}}; \quad \varphi_2(V) = \frac{V(\operatorname{tg} V - V)}{8 \operatorname{tg} V \left(\operatorname{tg} \frac{V}{2} - \frac{V}{2} \right)}.$$

Kritiskā spēka minimālo vērtību $P_{kr,1}$ atrodam no statiskās noturības nosacījuma:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$P_{kr,1} = 31,36 \frac{EI}{l^2}.$$

Šis rezultāts ir precīzs pieņemto hipotēžu ietvaros. Kā otru aplūkojam GEM variantu, kad reakcijas no vieninieku pārvietojumiem aprēķinātas pieņemot izlieču funkciju polinomu veidā, tā izvairoties no transcendentālām funkcijām. Pieņemot divus vispārinātos pārvietojumus Z_1 un Z_2 , saišu reakcijas būs (tab.3.8.1):

$$r_{11} = 11 \frac{EI}{l} - \frac{2}{15} Pl; \quad r_{22} = 8 \frac{EI}{l}; \quad r_{12} = r_{21} = \frac{2EI}{l}$$

Statiskās noturības nosacījums noved pie sekojošas kritiskā spēka vērtības:

$$P_{kr,2} = 78,75 \frac{EI}{l^2}.$$

Šis rezultāts par 255% pārsniedz precīzo rezultātu.

Apmierinošus P_{kr} rezultātus, izmantojot GEM dabū pieņemot trīs vispārinātās koordinātes, skat.zīm.3.8.3. Jau esošiem pārvietojumiem Z_1 un Z_2 pievienojam spiestā stieņa vidus punkta horizontālo pārvietojumu Z_3 (zīm.3.8.3). Attiecīgās papildus vienības pārvietojumu reakcijas būs (skat. tabulu 3.8.1)

$$r_{33} = \frac{1024}{5} \frac{EI}{l^3} - \frac{512}{105} \frac{P}{l}; \quad r_{13} = r_{31} = \frac{8}{15} P; \quad r_{23} = r_{32} = 0.$$

Noturības nosacījums

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

noved pie rezultāta, $P_{kr,3} = 32,23 \frac{EI}{l^2}$, kas tikai par 4 % atšķiras no precīzā rezultāta.

Tādā veidā, GEM piemērota lielu uzdevumu risināšanai., izmantojot datorus, jo noturības determinants satur vienīgi polinomus un nesatur transcendentas funkcijas.

§4.1. Metodes būtība un galvenie jēdzieni

REM metode sekmīgi konkurē ar GEM, dažos gadījumos tā pat ir efektīvāka. Metodes ideja tāda, ka tiek paplašināts uzdevuma aprēķina shēmas apgabals, bieži līdz bezgalībai, par cik bezgalīgiem apgabaliem - bezgalīgi garai sijai uz elastīga pamata, bezgalīgi elastīgai plātnēi, bezgalīgi elastīgai telpai - ir zināmi precīzi analītiski atrisinājumi vienības ārējam koncentrētam spēkam (vai momentam). Nosauksim šos risinājumus par ietekmes funkcijām. Izmantojot šīs funkcijas un superpozīcijas principu REM atrod tādas slodzes, kas apmierina dotā galīgā aprēķina objekta robežnosacījumus.

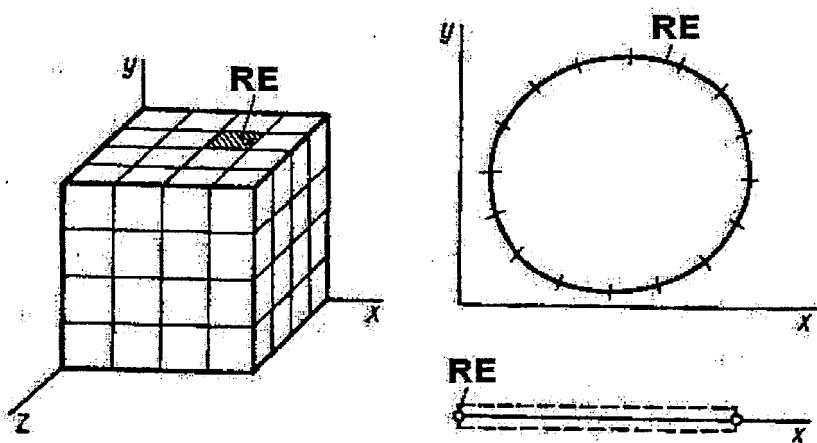
Apskatāmā ķermeņa robežu sadalām atsevišķos elementos, kurus sauksim par robeželementiem (RE). Zīm.4.1 redzami RE trīsdimensiju, divdimensiju un viendimensiju ķermeniem; tie ir attiecīgi virsmas elementi, kontūra posmi un robežpunkti. Ķermenī nosacīti paplašinām aiz tā robežām tā, lai tas klūtu par bezgalīga apgabala daļu, kuram zināmas ietekmes funkcijas. Katru RE noslogosim ar atbilstošu reaktīvu slodzi un izmantojot ietekmes funkcijas integrējot atradīsim katrā paplašinātā apgabala punktā spriegumus un pārvietojumus. Sastādot robežnosacījumus RE punktos un izmantojot ietekmes funkcijas aktīvām un reaktīvām slodzēm, kā arī superpozīcijas principu, nonākam pie algebrisku vienādojumu sistēmas, kuru atrisinot atrodam reaktīvās skodzes, kas apmierina dotā galīgā lieluma ķermeņa robežnosacījumus.

Tādā veidā REM nosaka reaktīvās slodzes uz ķermeņa robežas, kas "ieguldīts" bezgalīgā elastīgā vidē; atrastās slodzes novērš (kompense) aprēķināma ķermeņa un nosacīti pievienotās bezgalīgās vides mijiedarbību. Apskatīto REM variantu sauc par kompensējošo (vai fiktīvo) slodžu metodi. Dažreiz ērtāk uz ķermeņa virsmas slodžu vietā uzdot pārvietojumus. Citerīz robežnosacījumus ērtāk uzdot integrālvienādojumu veidā. Citi REM varianti apskatīti literatūrā [19...22].

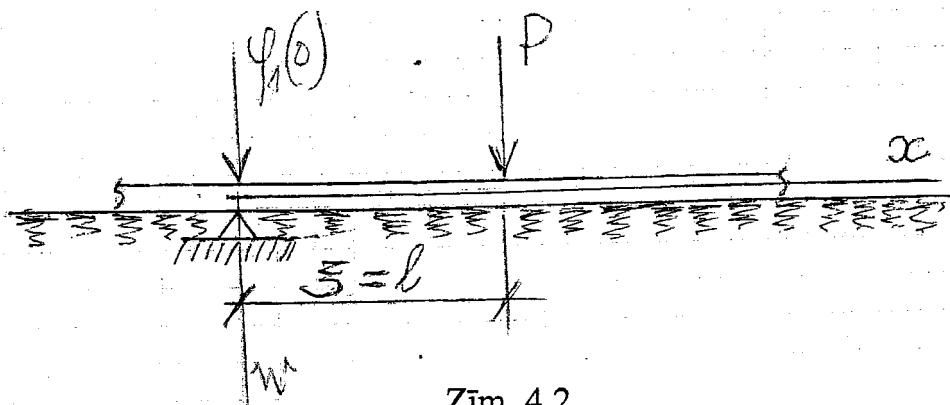
§4.2. Sijas uz elastīga pamata.

§4.8. Piemērs 14, patapināts nomācību grāmatas[19].

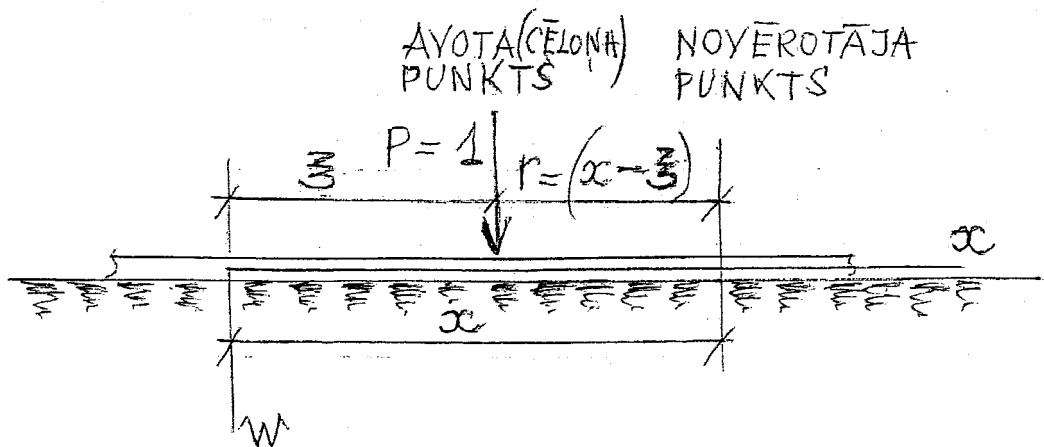
Apskatīsim fiktīvo slodžu metodes vienkāršu piemēru. Dota bezgalīgi gara sija uz elastīga pamata, kas slogota ar spēku P punktā $\xi = l$ (zīm.4.2), bet punktā $x = 0$ atrodas balsts, kur izliece $w = 0$.



Zīm. 4.1 Robeželementu (RE) piemēri trīsdimensiju, divdimensiju un viendimensiju ķermenim. Par RE kalpo atbilstošie ķermeņa virsmas elementi, kontūra atgriezumi vai robežpunkti.



Zīm. 4.2



Zīm. 4.3

Apskatīsim palīguzdevumu un atradīsim izlieces funkciju $W(x)$ sijai uz elastīga pamata, ja tā punktā ξ slogota ar vienības spēku P (balsta $X = 0$ nav), skat.zīm.4.3:

Izliece bezgalgarai sijai būs [1]:

$$w(x) = G_0(x, \xi) = \frac{\beta}{2k} e^{-\beta(x-\xi)} [\cos \beta(x - \xi) + \sin \beta(x - \xi)]$$

kur $\beta = \sqrt{\frac{K}{EI}}$

K - elastīga pamata koeficients

x - punkts, kurā aprēķina funkcijas $W(x)$ vērtību.

REM šo risinājumu sauc par fundamentālo.

Funkcija $G_0(x, \xi)$ definē fundamentālo risinājumu vienības spēka $P = 1$ iedarbībā.

Punktā, kur doti robežnosacījumi, pieliekam fiktīvu spēku. Fiktīvā un reālā spēka iedarbības rezultātā, izmantojot superpozīciju, nosakām $w(x)$ tā, lai izpildītos robežnosacījumi.

Uzdevuma robežnosacījumi (šis punkts ir arī robeželements)

$$x = 0; \quad w = 0$$

Robežnosacījuma punktā (robeželementu) sloganam ar fiktīvu slodzi $\varphi_1(0)$. Tai jābūt tādai, lai reālais spēks P un fiktīvais $\varphi_1(0)$ izraisītu punktā $x = 0$ nulles vērtības izliecei $w = 0$. Izmantojot fundamentālā risinājuma spēkiem P un $\varphi_1(0)$ superpozīciju dabū

$$w(x) = \varphi_1(0)G_0(x, 0) + PG_0(x, l)$$

Ievērojot robežnosacījumus dabū

$$w(0) = \varphi_1(0)G_0(0, 0) + PG_0(x, l) = 0$$

no kurienes fiktīvais spēks

$$\varphi_1(0) = -P \frac{G_0(0, l)}{G_0(0, 0)} = -Pe^{-\beta l} (\cos \beta l + \sin \beta l)$$

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

§ 4.3. Sijas, balstītas uz elastīga pamatojuma, lieces aprēķins

Aprēķināsim 30 cm augstu velmētā tērauda dubultā T-veida profila siju uz elastīgā pamata (zīm.4.3.1). Aprēķina izejas dati:

$$E = 2000 \text{ kN/cm}^2; I_x = 7080 \text{ cm}^4; b = 13,5 \text{ cm}^2$$

$$k_0 = 200 \text{ N/cm}^3; L = 3,9 \text{ m}; P = 100 \text{ kN},$$

kur k_0 pamatnes elastības koeficients

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{EI}}, \quad k = k_0 \cdot b$$

Uzdevuma atrisināšanai izmantosim fundamentālus atrisinājumus no vienības spēku iedarbības.

Vienības spēka $P = 1$ darbības rezultātā, kas iedarbojas punktā ξ (zīm.4.3.2), risinājums bezgalīgi garai sijai sekojošs [19]:

$$\begin{aligned} w(x) &= G_0(x, \xi) = \frac{\beta}{2k} e^{-\beta r} (\cos \beta r + \sin \beta r); \\ \theta(x) &= \frac{dw}{dx} = F_0(x, \xi) = \frac{\beta^2}{k} e^{-\beta r} \sin \beta r \operatorname{sgn}(\xi - x); \\ M(x) &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = E_0(x, \xi) = \frac{1}{4\beta} e^{-\beta r} (\cos \beta r - \sin \beta r); \\ Q(x) &= -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = D_0(x, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\beta r} \cos \beta r \operatorname{sgn}(\xi - x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

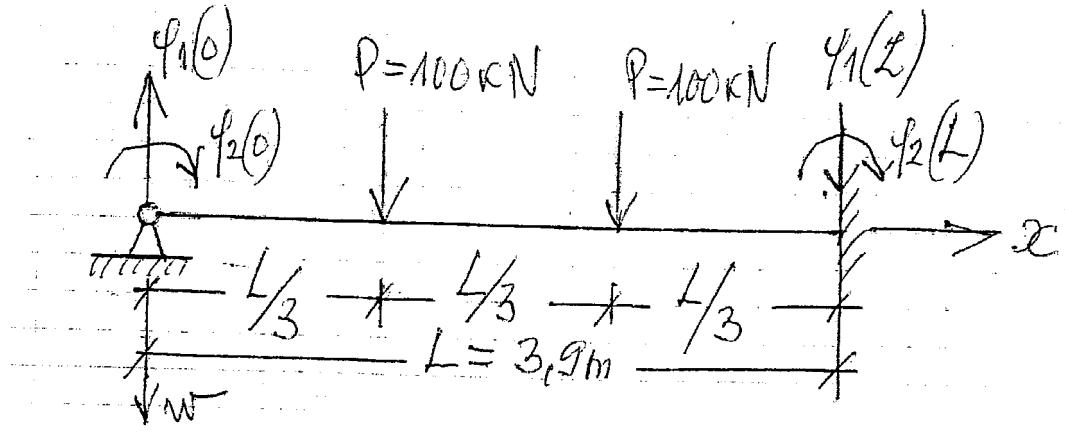
Funkcija $G_0(x, \xi)$ ir fundamentālais risinājums vienības spēka iedarbības rezultātā, bet funkcijas $F_0(x, \xi), E_0(x, \xi), D_0(x, \xi)$ ir fundamentālā risinājuma atvasinājumi.

Vienības momenta $M = 1$ iedarbības rezultātā, kas pielikts punktā ξ (zīm.4.3.1), bezgalīgi garai sijai, risinājums šāds [19]:

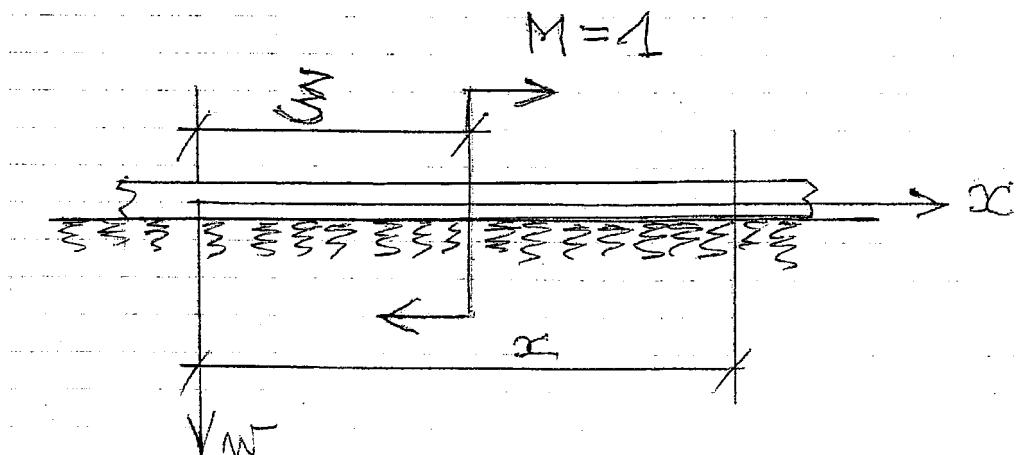
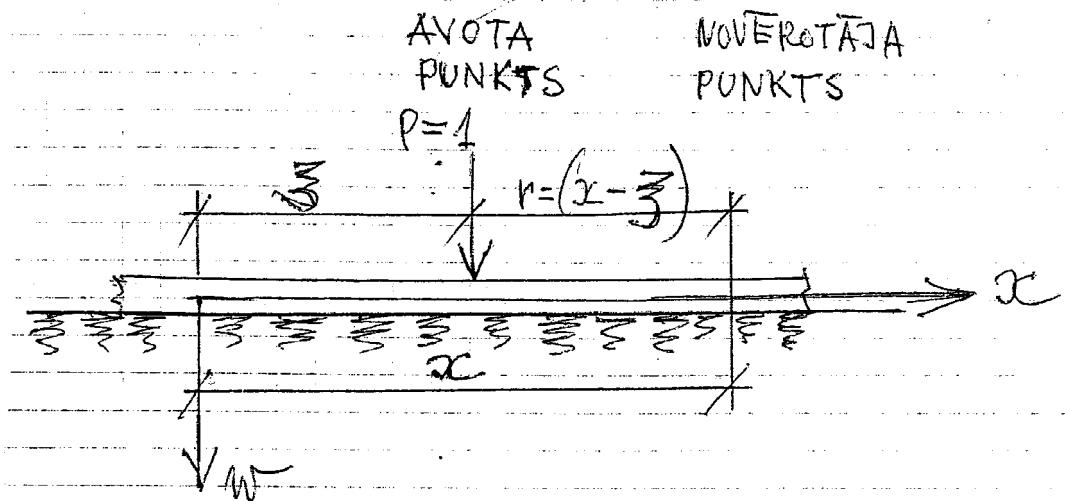
$$\begin{aligned} w(x) &= G_1(x, \xi) = F_0(x, \xi) = \frac{\beta^2}{k} e^{-\beta r} \sin \beta r \operatorname{sgn}(\xi - x); \\ \theta(x) &= \frac{dw}{dx} = F_1(x, \xi) = -\frac{4\beta^4}{k} E_0(x, \xi) = -\frac{\beta^3}{k} e^{-\beta r} (\cos \beta r - \sin \beta r); \\ M(x) &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = E_1(x, \xi) = D_0(x, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\beta r} \cos \beta r \operatorname{sgn}(\xi - x); \\ Q(x) &= -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = D_1(x, \xi) = \frac{k}{\beta} G_0(x, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\beta r} (\cos \beta r + \sin \beta r). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Funkcija $G_1(x, \xi)$ ir fundamentālais risinājums vienības momenta iedarbības gadījumā, bet funkcijas $F_1(x, \xi), E_1(x, \xi)$ un $D_1(x, \xi)$ ir fundamentālā risinājuma atvasinājumi.

Dotam uzdevumam fundamentālo risinājumu (4.3.1) un (4.3.2) superpozīcija noved pie meklējamo funkciju sekojošām sakarībām:



Zim.4.3.1



Zim.4.3.2

$$\begin{aligned}
W(x) &= \varphi_1(0)G_0(x,0) + \varphi_2(0)G_1(x,0) + \varphi_1(L)G_0(x,L) + \varphi_2(L)G_1(x,L) + \\
&\quad + P[G_0(x,1/3L) + G_0(x,2/3L)] \\
\theta(x) &= \varphi_1(0)F_0(x,0) + \varphi_2(0)F_1(x,0) + \varphi_1(L)F_0(x,L) + \varphi_2(L)F_1(x,L) + \\
&\quad + P[F_0(x,1/3L) + F_0(x,2/3L)] \\
M(x) &= \varphi_1(0)E_0(x,0) + \varphi_2(0)E_1(x,0) + \varphi_1(L)E_0(x,L) + \varphi_2(L)E_1(x,L) + \quad (4.3.3) \\
&\quad + P[E_0(x,1/3L) + E_0(x,2/3L)] \\
Q(x) &= \varphi_1(0)D_0(x,0) + \varphi_2(0)D_1(x,0) + \varphi_1(L)D_0(x,L) + \varphi_2(L)D_1(x,L) + \\
&\quad + P[D_0(x,1/3L) + D_0(x,2/3L)]
\end{aligned}$$

Dotā uzdevuma robežnosacījumi:

- 1) $W = 0; x = 0;$
- 2) $M = 0; x = 0;$
- 3) $W = 0; x = L;$
- 4) $w' = \theta = 0; x = L$

Ievietojot meklējamās funkcijās (4.3.3) uzdevuma robežnosacījumus, iegūstam fiktīvo spēku $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_1(L)$ un $\varphi_2(L)$ aprēķināšanai nepieciešamo vienādojumu sistēmu:

$$\begin{bmatrix} [A] & \{\varphi\} = \{F\} \\ 4x4 & 4x1 & 4x1 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

kur

- $[A]$ - vienādojumu sistēmas koeficientu matrica;
- $\{\varphi\}$ - meklējamie fiktīvie spēki;
- $\{F\}$ - dotie ārējie spēki:

$$\begin{aligned}
\{\varphi\} &= \begin{bmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \\ \varphi_1(L) \\ \varphi_2(L) \end{bmatrix}; \quad \{F\} = -P \begin{bmatrix} G_0(0,1/3L) + G_0(0,2/3L) \\ E_0(0,1/3L) + E_0(0,2/3L) \\ F_0(L,1/3L) + F_0(L,2/3L) \\ G_0(L,1/3L) + G_0(L,2/3L) \end{bmatrix}; \\
[A] &= \begin{bmatrix} G_0(0,0) & G_1(0+\varepsilon,0) & G_0(0,L) & G_1(0,L) \\ E_0(0,0) & E_1(0+\varepsilon,0) & E_0(0,L) & E_1(0,L) \\ F_0(0,0) & F_1(L,0) & F_0(L-\varepsilon,L) & F_1(L,L) \\ G_0(L,0) & G_1(L,0) & G_0(L,L) & G_1(L-\varepsilon,L) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Atzīmēsim, ka aprēķinot funkciju $F_0(x, \xi)$ vai $D_0(x, \xi)$ vērtības gadījumiem, kad novērotāja un avota punkti sakrīt, t.i., $x = \xi$, novērotāja punkts jānovieto attālumā ε pirms avota ($x = x - \varepsilon$) vai attālumā ε pēc avota ($x = x + \varepsilon$), atkarībā no tā, kur tiek aprēķināta meklējamās funkcijas vērtība [19].

Vienādojumu sistēmas (4.3.4) atrisinājums, ievērojot izejas datus, dod sekojošas fiktīvo spēku vērtības:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(0) &= -66,25kN; \quad \varphi_2(0) = -54,84kN \\
\varphi_1(L) &= -72,42kN; \quad \varphi_2(L) = -119,8kN
\end{aligned}$$

Tālāk izmantojot iegūtos rezultātus formulās (4.3.3), izskaitļojam $w(x), M(x), Q(x)$ [19].

Mācību līdzeklī [19] doti uzdevumi ar vairākiem robeželementiem. Šādu uzdevumu fiktīvo spēku aprēķināšanai nonākam pie algebrisku vienādojumu sistēmas.

REM metodes pilna kursa apgūšanai ieteicams minētais darbs [19], kā arī citi avoti [20,21, 22,23]

Dziļākai priekšmeta apgūšanai beigās dota nepieciešamā mācību literatūra.

5. nodaļa. KONSTRUKCIJU NELINEĀRO UZDEVUMU APRĒĶINU METODES

§ 5.1. Problēmas nostādne un risināšanas metodes

Konstrukciju aprēķinos sastopam divu veidu nelinearitātes. Pirmais veids saistīts ar $\sigma \sim \varepsilon$ sakarības nelinearitāti, kas raksturo konstrukcijas materiāla īpašības elastīgi-plastiskā stadijā un ļauj aprēķināt sistēmas robežslodzi. Otrais veids saistīts ar ģeometrisko nelinearitāti, kad konstrukcijas pārvietojumi izraisa ievērojamas tās ģeometriskas formas izmaiņas un līdzvara vienādojumi jāsastāda deformētam stāvoklim.

Robežslodzes aprēķinam patieso elastīgi-plastiskā materiāla $\sigma \sim \varepsilon$ diagrammu vienkāršo. Šī diagramma kā stiepē, tā arī spiedes gadījumā sastāv no diviem posmiem - slīpā, kas raksturo elastīgās deformācijas un horizontālā posma plastiskām deformācijām. Horizontālā posma plastiskās deformācijas pieņem neierobežoti lielas, bet materiāla nostiprināšanos neņem vērā. Tādas diagrammas t.s. Prandtla diagrammas var pielietot tērauda, stiegrotā betona u.c. konstrukciju aprēķiniem, kad sabrukumu nosaka materiāla plūstamība p_{pl} (plūstamības robeža). Robežslodzes gadījumā liekto elementu maksimālais moments būs

$$M_{ult} = p_{pl} \cdot W_{pl}$$

kur p_{pl} - materiāla plūstamības robeža;

W_{pl} - šķērsgriezuma plastiskais pretestības moments.

Ja sistēmas lieces moments kādā šķērsgriezumā sasniedz lielumu M_{ult} - stienī, rodas plastiskā (tecēšanas) locīkla.

Sistēmas robežslodze tiks sasniegta tad, kad plastisko locīklu skaits kļūs vienāds ar sistēmas lieko nezināmo skaitu plus viens. Dotai statiski nenoteicamai sistēmai, sloganai ar konkrētu slodzi ir daudz piepūļu variantu, kas apmierina līdzvara nosacījumus. Saskaņā ar statisko teorēmu patiesais piepūļu sadalījums būs tāds, kuram atbilst maksimālā robežslodze, ja apmierināti līdzvara nosacījumi un lieces momenti nepārsniedz M_{ult} . Robežslodzei mēs tuvojamies no apakšas, t.i. dabū apakšējo novērtējumu.

Tai pašai statiski nenoteicamai sistēmai un slodzei ir daudz dažādas sabrukuma formas. Saskaņā ar kinemātisko teorēmu patiesā būs tā sabrukuma forma, kurai atbilst mazākā robežslodze. Risinot uzdevumu ar kinemātisko metodi, katram iespējamam sabrukuma mehānismam sastāda ārējo un iekšējo spēku darbu summu uz virtuāliem pārvietojumiem.

Tātad kinemātiskās metodes būtība tāda, ka robežslodzes noteikšanai salīdzina dažādus kinemātiski iespējamos stāvokļus robežslodzes gadījumā. Tālāk kinemātiski iespējamiem stāvokļiem piemēro Lagranža virtuālo pārvietojumu principu un no virtuālā darba vienādojuma nosaka robežslodzi. Metode dod robežslodzes augšējo novērtējumu, mēs tai tuvojamies no augšas.

§ 5.2. Statiskās teorēmas pielietojums robežslodzes noteikšanai

Saskaņā ar statisko teorēmu, robežslodze ir lielākā no visām slodzēm, ja tiek apmierināti līdzvara vienādojumi, un neviena piepūle nepārsniedz robežpiepūli.

Aprēķināsim robežslodzi rāmim, kas parādīts 5.2.1.zīm. Šajā zīmējumā dotā lieces momentu epīra, kas apmierina līdzvara vienādojumus. Momenti šķēlumos 1,2 un 3 nedrīkst būt lielāki par M_{ult} :

$$M_1 = LX \leq M_{ult}; \quad (5.2.1)$$

$$M_2 = LX - Pl \leq M_{ult}; \quad (5.2.2)$$

$$M_3 = -LX + 4Pl \leq M_{ult} \quad (5.2.3)$$

Slodze P un reakcija X pozitīvas, tamdēļ

$$P \geq 0 \quad (5.2.4)$$

$$X \geq 0 \quad (5.2.5)$$

Attēlosim apgabalu, ko ierobežo nevienlīdzības (5.2.1) ... (5.2.5). Dekarta koordinātu sistēmā iegūstam zīm.5.2.2. Lielāko P vērtību dabū punktā k , kur $P_{ult} = \frac{M_{ult}}{2l}$.

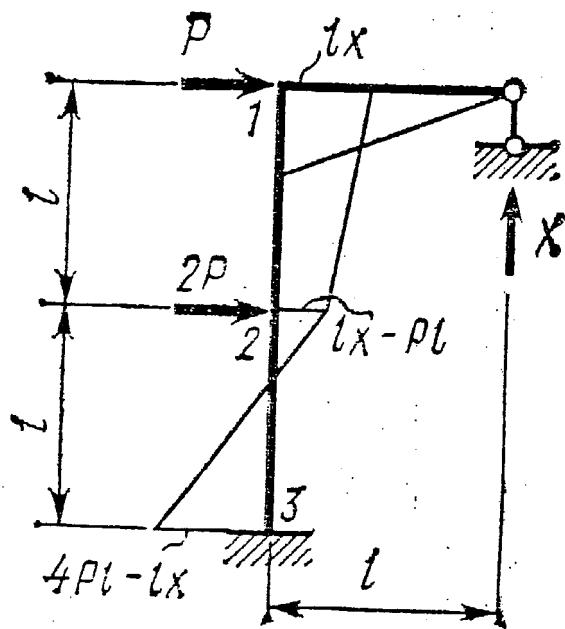
Ja sistēmai ir lielāka statiskā nenoteicamība, ar vairākiem nezināmiem, tad uzdevumu grafiski attēlot nevar un jāizmanto lineārās vai nelineārās programmēšanas metodes, kuru aprakstus un piemērus var atrast speciālā literatūrā. Atzīmēsim, ka lineārās un nelineārās programmēšanas metodes plaši pielieto optimizācijas uzdevumos (skat.speciālo literatūru).

§ 5.3. Kinemātiskās teorēmas pielietojums robežslodzes noteikšanai; Lagranža virtuālo pārvietojumu princips

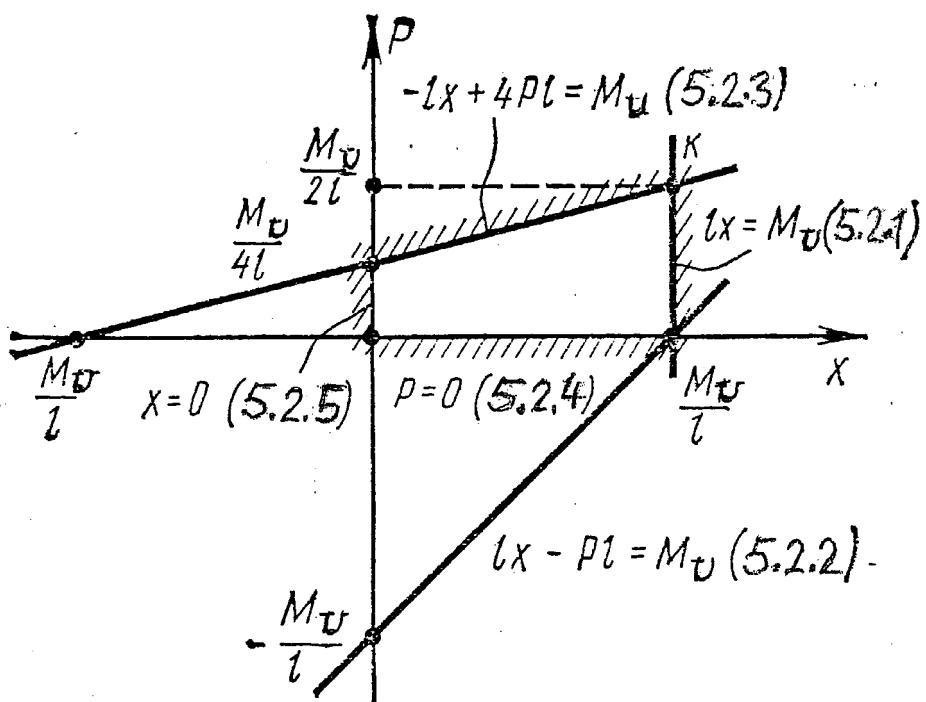
Pielietojot kinemātisko metodi, nepieciešams noskaidrot visas iespējamās sistēmas nestspējas zaudēšanas shēmas. Šim nolūkam jāpieņem, ka izveidojušies tik daudz plastiskie šarnīri, cik nepieciešams, lai sistēma kļūtu par mehānismu, vai kinemātisko ķēdi. Šīs pārvērtības mehānismā var notikt dažādos veidos, kurā katram veidam atbilst sava robežslodze. No visām iegūtām robežslodzēm, patiesā būs mazākā. Tā būs vienāda ar to, kas iegūta ar statisko metodi.

Zīmējumā 5.2.3.a,b,c parādīti trīs iespējamie apskatāmās sistēmas (zīm.5.2.1) nestspējas zaudēšanas mehānismi.

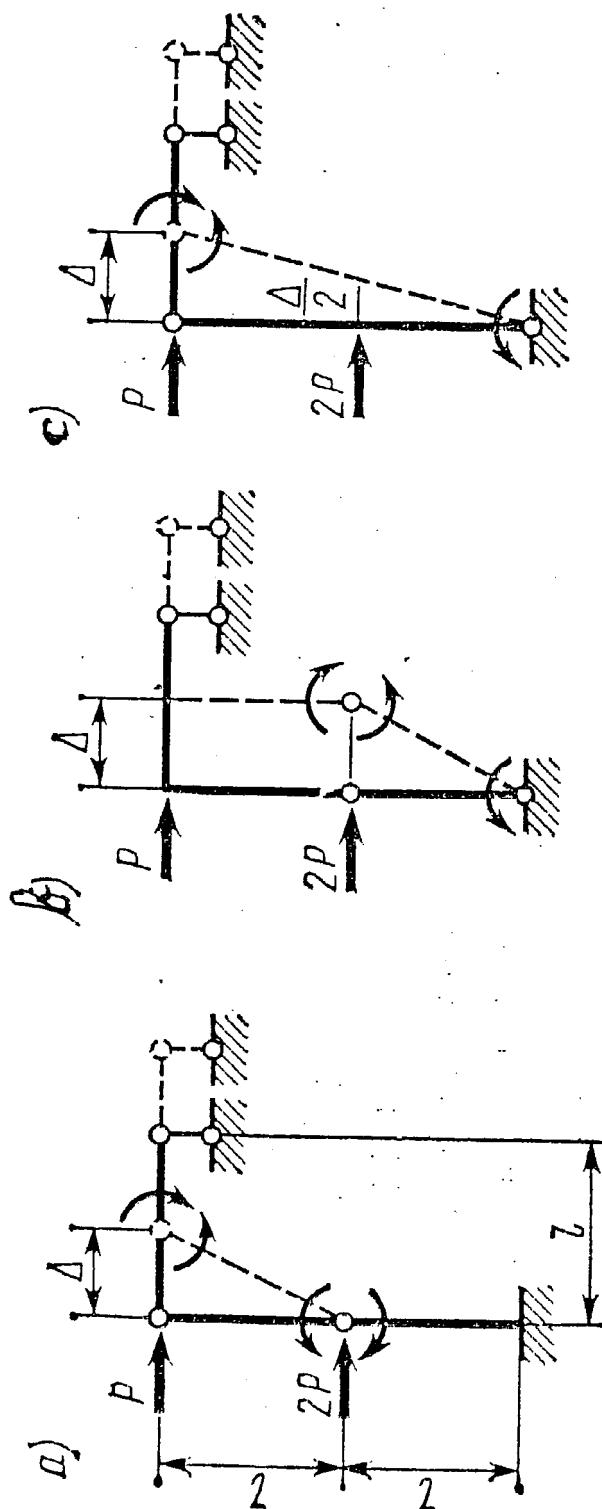
Pielietojot virtuālo pārvietojumu principu, katram nestspējas zaudēšanas mehānismam sastādām virtuālo darbu izteiksmes:



Zim.5.2.1



Zim.5.2.2



Zim.5.2.3

$$P\Delta - M_{ult} \frac{\Delta}{l} - M_{ult} \frac{\Delta}{l} = 0 \quad (\text{zīm.5.2.3.a}) \rightarrow P = 2 \frac{M_{ult}}{l};$$

$$P\Delta + 2P\Delta - M_{ult} \frac{\Delta}{l} - M_{ult} \frac{\Delta}{l} = 0 \quad (\text{zīm.5.2.3.b}) \rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{M_{ult}}{l};$$

$$P\Delta + 2P \frac{\Delta}{2} - M_{ult} \frac{\Delta}{2l} - M_{ult} \frac{\Delta}{2l} = 0 \quad (\text{zīm.5.2.3.c}) \rightarrow P = \frac{M_{ult}}{2l}$$

Mazākā spēka P vērtība $P = \frac{M_{ult}}{2l}$, kas saskan ar rezultātu, kas iegūts ar statisko metodi.

§ 5.4. Geometriski nelineārā plātnu teorija un tās lielo izlieču aprēķins (Bubnova-Gajorkina metode)

Ja plānās plātnes izlieces pārsniedz $t/5 \dots t/2$, kur t - plātnes biezums, tad tās izlieču aprēķinam jāizmanto ģeometriski nelineāro teoriju (pieņemot, ka plātnes materiāls seko Huka likumam). Šādā plātnē papildus lieces spriegumiem rodas arī vienmērīgi izkliedēti pa biezumu spriegumi, kurus sauc par membrānsriegumiem. Šiem spriegumiem atbilst deformācijas $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma^0$ kas rodas plātnes vidus virsmā.

Lielo izlieču aprēķiniem izmanto divas hipotēzes: taisno normāļu hipotēzi un hipotēzi par to, ka horizontālie slāni nespiež uz otru, t.i., $\sigma_z = 0$. Salīdzinot ar mazo izlieču aprēķinu, atmet hipotēzi par membrānsriegumu neesamību.

Pieņemot, ka pārvietojumi u, v ir mazi, bet izliece w -galīga lieluma, bet samērojama ar plātnes biezumu t , vidus virsmas deformācijas būs nelineāras pret w :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma^0 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Plātnes vidus virsmas deformācijām jāapmierina deformāciju nepārtrauktības nosacījums, kas izriet no iepriekšējās sakarības:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.4.1)$$

Vidus virsmas liekumi α_x, α_y un vērpe α tādi paši kā stingām plātnēm:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Plātnes deformācijas, ievērojot taisnās normāles hipotēzi, būs

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma = \gamma^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

Tālāk apskatām plātnes līdzsvara vienādojumus pie lielām izliecēm. Zīm.5.2.4 parādīts bezgala mazs plātnes elements deformētā stāvoklī. Zīm.5.2.4a parādītas vidus virsmas piepūles, zīm.5.2.4b - lieces piepūles.

No nosacījuma $\sum X$ seko $\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0$ - līdzīgi kā lineārā uzdevumā

$$\text{No } \sum Y \rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

Līdzsvara nosacījums $\sum Z = 0$ jāsastāda plātnes elementam deformētā stāvoklī [9]; pēc augstākās kārtas mazo lielumu atmešanas dabū:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + q = 0 \end{aligned}$$

Nosacījumi $\sum M_x = 0$ un $\sum M_y = 0$ dod rezultātu, kas neatšķiras no mazo izlieču teorijas

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y$$

No iepriekš iegūtiem vienādojumiem seko [9]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -q \quad (5.4.2)$$

Deformācijas un piepūles savstarpēji saista Huka likums, t.i. materiāla mehāniskās īpašības t.sk. fizikālie likumi:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{Et} (N_x - \mu N_y); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x); \quad \gamma^0 = \frac{S}{Gt} \quad (5.4.3)$$

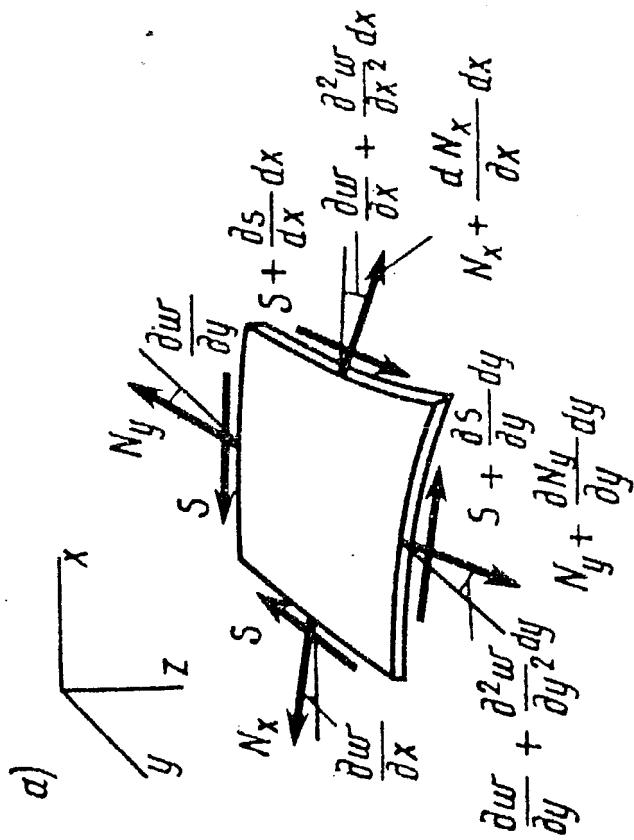
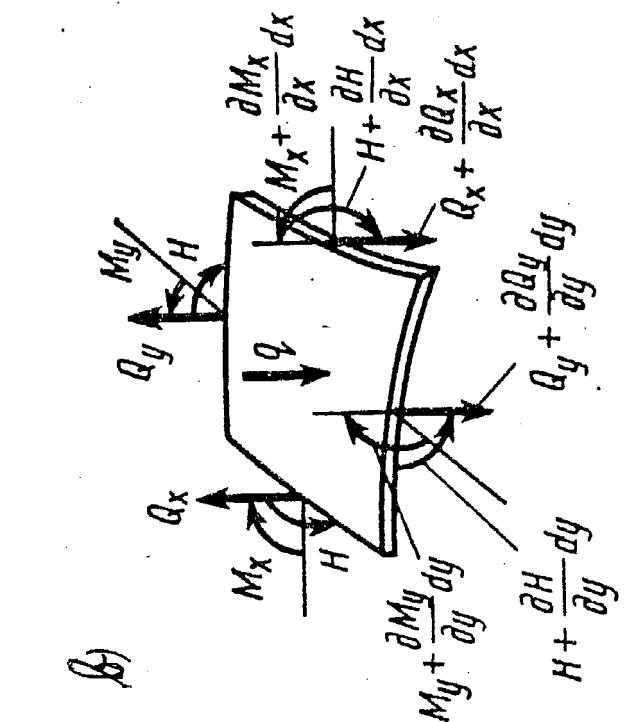
kur $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Momentiem spēkā šādas sakarības

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad H = -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.4.4)$$

kur

Tālāk sastādīsim uzdevuma atrisinošos vienādojumus. Ievietojot (5.4.3) un (5.4.4) vienādojumā (5.4.1) un (5.4.2) dabū



Zim.5.2.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} & \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \mu N_x) - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right] = \\ & = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.4.5a,b) \\ D \nabla^4 w - N_x & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q \end{aligned}$$

kur

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

un

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}$$

Nezināmo skaita samazināšanai ievedam vidus virsmas membrānspriegumu funkciju

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

kas apmierina tā patīgi līdzsvara vienādojumus $\sum X = 0$ un $\sum Y = 0$.

Ievietojot iegūtās sakarības vienādojumos (5.4.5a,b), dabū

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ D \nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0 \quad (5.4.6a,b) \end{aligned}$$

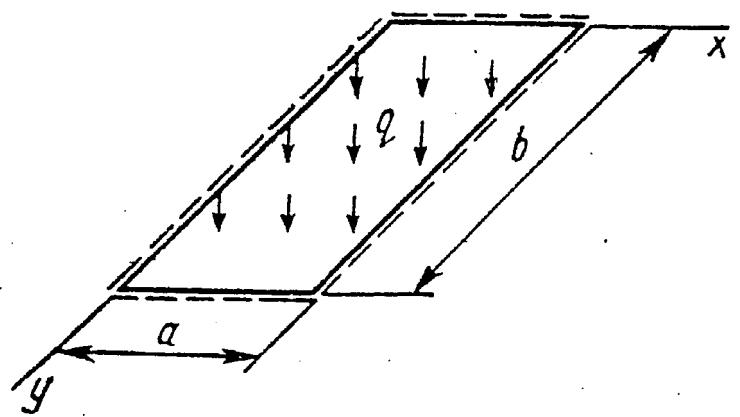
Vienādojumi (5.4.6a,b), kas saista vidus virsmas spriegumu funkciju Φ ar izlieču funkciju w , ir plātnu lielo izlieču teorijas galvenā formula. Tādā veidā plātnu lielo izlieču aprēķins noved pie divu nelineāru vienādojumu (5.4.6a,b) sistēmas atrisināšanas attiecībā pret funkciju Φ un izlieci w . Šie vienādojumi pazīstami kā Karmana vienādojumi. Meklējamām funkcijām Φ, w ir jāapmierina ne tikai sistēma (5.4.6a,b), bet arī robežnosacījumi.

Kā piemēru apskatam taisnstūra plātnes izlieču aprēķinu, kas slogota ar vienmērīgu slodzi q (zīm.5.2.5). Funkcijas Φ un izlieces w aproksimācijā paturam tikai vienu rindas locekli un uzdevumu risinām ar Bubnova-Gałorkina metodi (pieņem sistēmu ar vienu brīvības pakāpi):

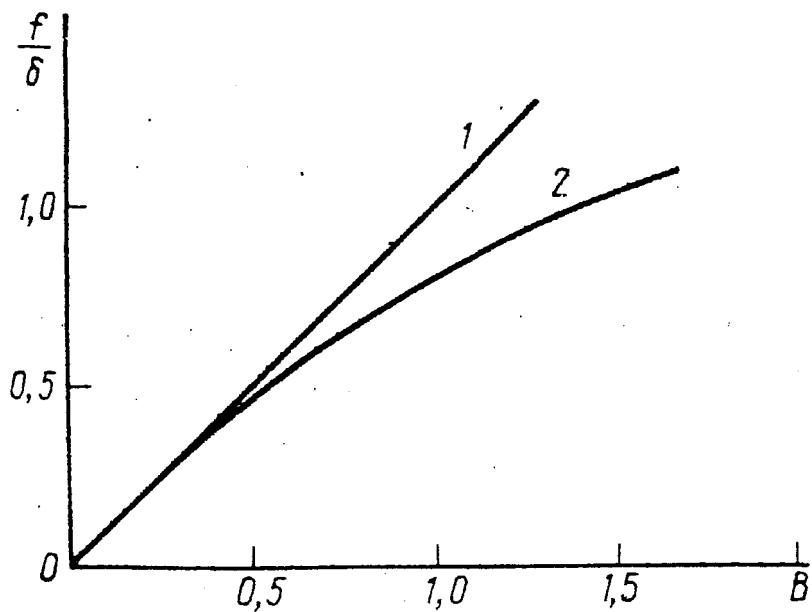
$$w \approx f \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

$$\Phi \approx \varphi \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

Ievietojot šīs izteiksmes sistēmā (5.4.6a,b), dabū



Zīm.5.2.5



Zīm.5.2.6

$$X_1 = \frac{1}{Et} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y -$$

$$- \frac{\pi^4}{a^2 b^2} f^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y - \sin^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y \right)$$

$$X_2 = D \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 f \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y -$$

$$- 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} f \cdot \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y - \cos^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y \right) - q$$

Pielietojot Bubnova-Gałorkina metodi, reizinot X_1 un X_2 ar $\sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$ un rezultātu integrējot pa plātnes virsmu:

$$\int_0^a \int_0^b X_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y dx dy = 0$$

$$\int_0^a \int_0^b X_2 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y dx dy = 0$$

dabū nelineāru vienādojumu sistēmu pret nezināmiem φ un f :

$$\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi + \frac{16\pi^2 Et}{3a^2 b^2} f^2 = 0$$

$$D \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 f - \frac{32\pi^2 Et}{3a^2 b^2} f \cdot \varphi = \frac{16}{\pi^2} q$$

Šo sistēmu var reducēt uz vienu vienādojumu pret izlieces amplitūdi f . Piemēram, ja $a/b=1$, tad

$$\frac{f}{t} + \frac{128(1-\mu^2)}{3\pi^4} \frac{f^3}{t^3} = B$$

kur

$$B = \frac{4qa^4}{\pi^6 Dt}$$

Pēdējais vienādojums dod kvalitatīvu kvadrāta plātnes izlieces analīzi lielām izliecēm. Zīmējumā 5.2.6 parādīti $\frac{f}{t} \sim B$ teorētiskie grafiki kvadrāta plātnei mazām (1. līkne) un lielām (2. līkne) izliecēm, ja $\mu=0,3$. 10% kļūdu dabūjam jau pie $f/t \approx 0,5$.

§ 5.5 Lēzeno čaulu izlieces ģeometriski nelineārā nostādnē (Bubnova – Gałorkina metode vienādojumu sistēmai)

Par lēzeno sauc čaulu, kuras augstums nepārsniedz piekto daļu tās mazākā plāna izmēru (zīm.5.5.1). Lēzeno čaulu lieces vienādojumu sistēma, ievērojot galīga lieluma izlieces, dota mācību grāmatā [2, formulas (2.3. 9.21) un (23.9.22), 460 lpp.]. Izvērstā veidā šie vienādojumi taisnstūra plāna čaulai ar $q = \text{const}$ šādi:

$$X = \frac{D}{h} \nabla^4 w - L(F, w) - k_x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{q}{h} = 0 \quad (5.5.1)$$

$$Y = \frac{1}{E} \nabla^4 F + \frac{1}{2} L(w, w) + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (5.5.2)$$

kur w – čaulas vidus virsmas izliece

q – šķērsslodze, pieņemta pastāvīga

F – spriegumfunkcija

$$k_x = \frac{1}{R_x}, k_y = \frac{1}{R_y} \text{ - liekumi, pieņemti pastāvīgi}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \dots}{\partial y^4},$$

$$L(w, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$L(F, w) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

a, b – čaulas kontūra malu garumi (zīm.5.5.1).

Robežnosacījumi: čaulas malas locīklveidīgi savienotas ar kontūra balsta elementiem:

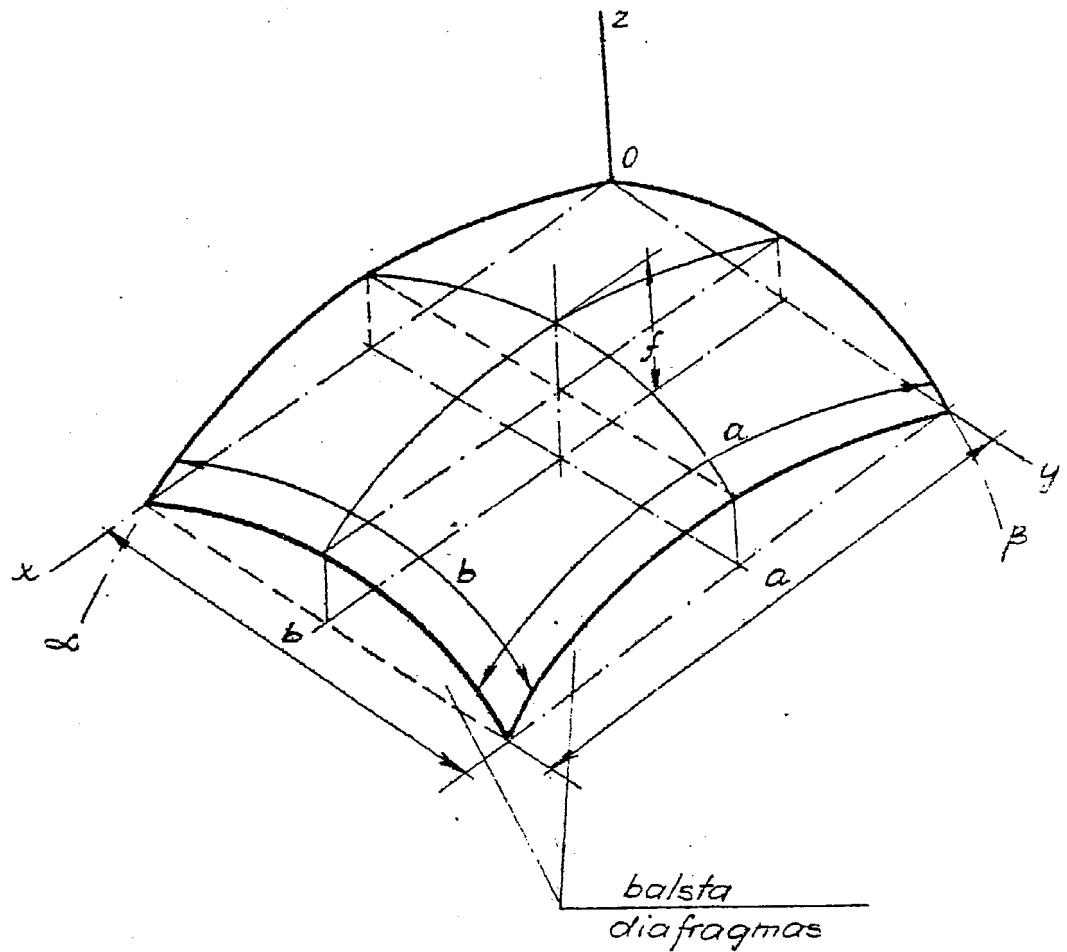
$$\text{ja } x = 0, x = a, \text{ tad } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \sigma_x = 0, \tau = 0.$$

Analogi nosacījumi malām $y = 0$ un $y = b$.

Pirmā tuvinājumā pieņemam šādas w un F aproksimācijas, kas apmierina robežnosacījumus:

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad F = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (5.5.3)$$

Sistēmu (5.5.1), (5.5.2) integrējam ar Bubnova – Gałorkina metodi, to pielietojot vienlaicīgi divu vienādojumu sistēmai. Sastādam Bubnova – Gałorkina metodes vienādojumus:



Zīm.5.5.1 Lēzena čaula

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0, \quad \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (5.5.4)$$

Ievietojot šeit (5.5.1), (5.5.2) un (5.5.3) pēc integrēšanas dabūjam:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} f_1 \frac{\pi^6}{16} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - A_1 f_1 \frac{2}{3} \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + A_1 \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{k_x}{b^2} + \frac{k_y}{a^2} \right) - \frac{q}{h} = 0 \\ \frac{A_1}{E} + \frac{16}{3\pi^2 \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2} f_1^2 - \left(\frac{k_x}{b^2} + \frac{k_y}{a^2} \right) \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} f_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Ievedam bezdimensionālus parametrus:

$$\begin{aligned} k_x^* = \frac{k_x a^2}{h}, \quad k_y^* = \frac{k_y b^2}{h}, \quad k^* = k_x^* + k_y^*, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \\ \zeta = \frac{f_1}{h}, \quad q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{ab}{h^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Atrodot no sistēmas sakarību (5.5.5) starp slodzi un izlieci, un ievērojot (5.5.6) dabūjam (t.i. izslēdzot A_1):

$$q^* = \frac{32\pi^2}{9} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)} \zeta^3 - k^* \frac{\pi^2}{\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)} \zeta^2 + \left[\frac{\pi^2}{16} k^{*2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)} + \frac{\pi^6 \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2}{192(1-\mu^2)} \right] \zeta \quad (5.5.7)$$

Kvadrātveida plāna čaulai ($a = b$) un ja $\mu = 0,3$, tad

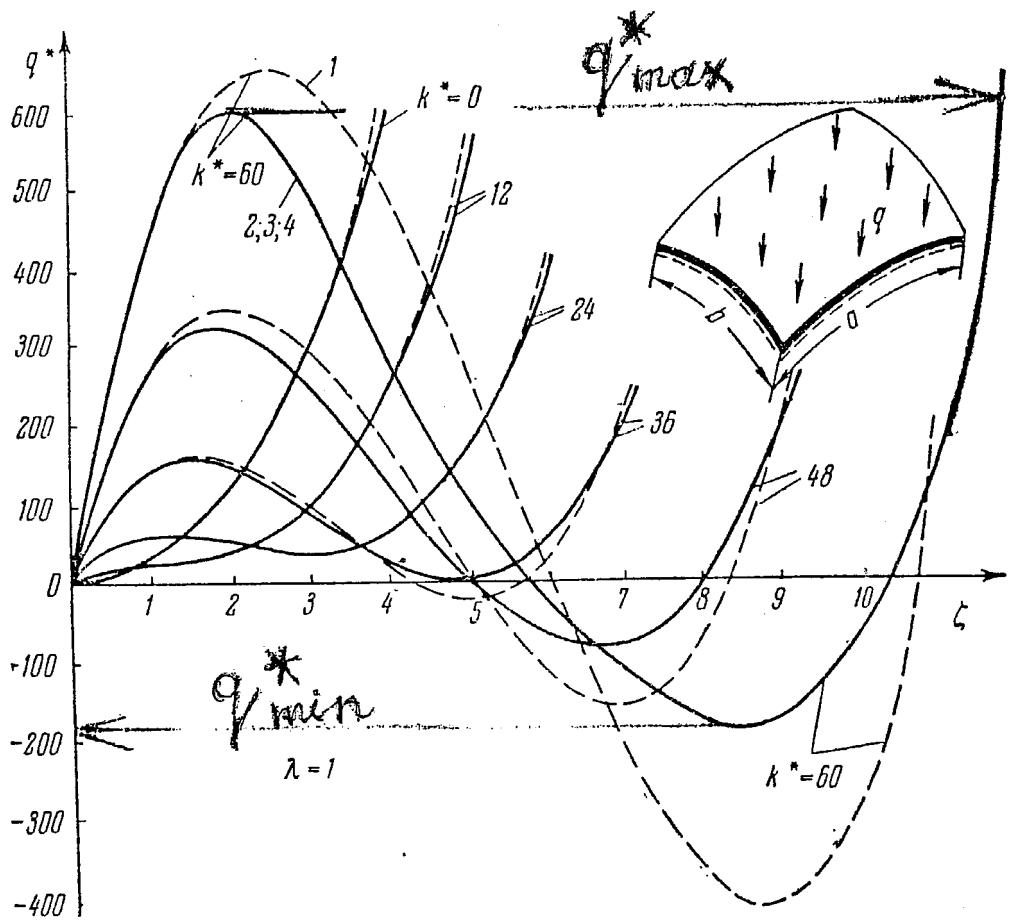
$$q^* = 8,77 \zeta^3 - 2,46 k^* \zeta^2 + (0,154 k^{*2} + 22) \zeta \quad (5.5.8)$$

Grafikā, kas parādīts 5.5.2.zīmējumā, ar pārtrauktu raustītu līniju attēlota (5.5.8) sakarība dažādām k^* vērtībām, ja $\lambda = \frac{a}{b} = 1$. Mazām k^* vērtībām q^* nepārtrauki pieaug, līdzīgi kā plātnēm. Sākot ar $k^* = 18$ diagrammai ir lejup ejošs posms (zīmējumā 5.5.2 skat. līkni $k^* = 24$), kas norāda uz to, ka izliece ar lēcienu var pāriet uz augšupejošu līknes posmu, kā parādīts līknei $k^* = 60$.

Precīzāka rezultāta iegūšanai w un F aproksimācijai jāpienēm izteiksmes rindas veidā

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i,j} f_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \\ F &= \sum_{i,j} A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Risinājums būs jo precīzāks, jo vairāk rindas locekļi tiks ņemti vērā. Ar nepārtrauktu līniju zīmējumā 5.5.2 parādīti rezultāti, kas iegūti ar datoru paturot tik daudz rindas locekļu, lai risinājums konverģētu.



Zīm.5.5.2 Kvadrāta plāna paneļa „slodzes ~ izlieces” grafiks

Projektējot aplūkotās lēzenās čaulas ievērosim, ka jo lielāks čaulas liekums k^* , jo čaula stingāka, t.i., tās izlieces ir mazākas pie tās pašas slodzes; šeit jāievēro arī tas, ka ekspluatācijas slodzei q_{serv}^* ir jābūt mazākai par q_{\max}^* , ievērojot nepieciešamo drošību, tāpēc ir svarīgi precīzāk noteikt q_{\max}^* , neaprobežojoties tikai ar pirmā tuvinājuma rezultātiem.

No zīmējuma $q^* \sim \zeta$ (zīm.5.5.2a) grafika seko, ka šī sakarība pie $k^* < 24$ ir neviennozīmīga, t.i. vienai parametra q^* vērtībai atbilst trīs vienādojuma (5.5.7) saknes. Kamēr parametrs q^* pieaug no nulles līdz maksimālai vērtībai (ordināta A uz līknes 1) amplitūda ζ nepārtraukti pieaug, ka atbilst posms OP līknei 1 (zīm.5.5.2a). Kā tikai slodzes parametrs q^* kļūst lielāks par A, iestājās situācija, kad izliece lēcienveidīgi pāriet stāvoklī D (uz līknes 1, zīm.5.2.a). „Pārlēciena” laikā panelis acumirklīgi pāriet no stāvokļa I uz stāvokli II (zīm.5.5.2.b). Tālāk palielinot slodzi, pieaug paneļa izliece, kas zīm.5.5.2.a attēlojas uz līknes 1 kā posms DC.

Saskaņā ar lineāro čaulu teoriju, posmā OA (līkne 1 zīm.5.5.2.a) sakarība $q^* \sim \zeta$ ir lineāra; tā paliek lineāra arī tad, ja slodzes pieaug virs grafika A punkta, kas ir kvalitatīvi kļūdaini; lineārā teorija neatspoguļo pārlēciena procesu, bet dod nepārtrauktu $q^* \sim \zeta$ lineāru sakarību (līkne 1' zīm.5.5.2.a). Atzīmēsim, ka pēc slogošanas sekojošai atslodzei paneļa izlieces atšķirsies no noslogošanas līknes OADC.

Atslodzes laikā panelis neatgriežas izejas stāvoklī 0. Paliek izliece, ko raksturo abscisas punkts E. Lai atgrieztu paneli sākuma stāvoklī, nepieciešams to sloganot ar pretējās zīmes slodzi, kas atbilst punkta B ordinātai zīm.5.5.2.a. Pie šādas negatīvas slodzes (punkts B zīm.5.5.2.a notiek paneļa „pārlēciens” atpakaļ virzienā, kam uz līknes 1 atbilst pāreja no punkta B uz punktu F. Tikai tagad pēc atslogošanas (negatīvās slodzes samazināšanas) paneļa izliece atgriezīsies savā izejas stāvoklī (no punkta F uz 0). Ja $k^* < 24$, piemēram, ja $k^* = 12$, nekādu „pārlēciena” punktu nav.

Redzam, ka samazinot lēzenās čaulas sākuma augstumu f, būtiski izmainās tās slodzes izlieces $q^* \sim \zeta$ diagramma.

Literatūra

1. Lavendelis E. Materiālu pretestība, Zvaigzne, Rīga, 1986.
2. Melderis I., Teters G. Būvmehānika, Zvaigzne, Rīga, 1977.
3. Benker H. Mathematik mit Mathcad, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.
4. Gutkowski R. Structures: Fundamental Theory and Behaviour. Second Edition, Mc Graw-Hill, NY, 1988.
5. Ghali A. and Neville A.M. Structural Analysis, 4-nd Edition, E and FN Spon, London, 1997.
6. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики (перевод с болг.), Стройиздат, Москва, 1981.
7. Coates R.C., Coutie M.G. and Kong F.K. Structural Analysis. E and FN Spon, London, 1987.
8. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности, Наука, Москва, 1984.
9. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности, издание второе, Высшая школа, Москва, 2002.
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теории упругости, перевод с английского, Наука, Москва, 1975.
11. Eschenauer H., Schnell W. Elastizitätstheori. 3.Auflage, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
12. Betten J. Finite Elemente für Ingenieure. Band.1 Grundlagen, Matrixmethoden, Springer, Berlin, 1997. Band 2. Variationsrechnung, Eenergiemethoden, Springer, Berlin, 1998.
13. Rikards R., Čate A. Galīgo elementu metode, RTU, Rīga, 2002.
14. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика, Высшая школа, Москва, 1986.
15. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, London, 1989.
16. Bull I.W. Finite Element Applications to Thin-Walled Structures. E and FN Spon, London, 1990.
17. Astley R.J. Finite Elements in Solids and Structures. E and FN Spon, London, 1992.
18. Brown D.K. Introduction to the Finite Element Method Using BASIC Programs. 2-nd Edition, Blackie Academic and Professional, London, 1990.
19. Рикардс Р.Б. Применение метода граничных элементов в решении задач теории упругости, РПИ, Рига, 1988.
20. Brebbia C.A. and Dominquez J. Boundary Elements. Second Edition. Mc Graw-Hill, NY, 1988.
21. Crouch S.L. and Starfield A.M. Boundary Element Method in Solid Mechanics. Chapman and Hall, London, 1991.

22. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. Перевод с англ., Мир, Москва, 1984.
23. Manolis G.D. and Beskos D.E. Boundary Element Methods in Elastodynamics. E and FN Spon, London, 1988.